PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 15 — 1. August 1929 — 30. Jahrgang

Redaktionsschluß für Nr. 17 am 15. August 1929.

INHALT:

Originalmitteilungen:

J. v. Neumann u. E. Wigner, Über merkwürdige diskrete Eigenwerte. S. 465.

J. v. Neumann u. E. Wigner, Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen. S. 467.

L. Schiller und Th. Burbach, Über die Beziehung zwischen Widerstand und Wärmeübergang bei der Strömung in Rohren. S. 471.

A. Glaser, Über den Bau eines großen Elektromagneten. S. 472.

W. Ende, Über Kontaktpotentiale zwischen gleichen Metallen. S. 477.

W. Alexandrow, Über die Ausbreitung der ebenen elektromagnetischen Wellen im kugelsymmetrischen Gravitationsfelde. S. 480.

W. Anderson, Über die Bildung des Ozons in den höchsten Atmosphärenschichten. S. 485.

Besprechungen:

A. Haas, Materiewellen und Quantenmechanik. S. 488.

M. v. Ardenne, Verstärkermeßtechnik. S. 488.

Personalien. S. 488.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über merkwürdige diskrete Eigenwerte.

Von J. v. Neumann und E. Wigner.

1. Es sind in der quantentheoretischen Literatur mehrfach anschauliche Schlüsse von der Art gemacht worden, daß z. B. aus der Tatsache, daß ein Elektron genügend kinetische Energie hat, um sich aus einem atomaren System (klassisch gerechnet) ins Unendliche zu entfernen, geschlossen wurde, daß der betreffende Energiewert zum kontinuierlichen Spektrum des genannten Systems gehört. Im folgenden soll gezeigt werden, daß derartige Überlegungen mit äußerster Vorsicht zu handhaben sind, denn es kommt häufig ein entgegengesetztes Verhalten vor. Dieser Umstand, daß ein Elektron auf einer stationären Bahn verharrt (Punkteigenwert!), obwohl es Energie genug hätte, um sich aus dem Anziehungsbereich des ihn umgebenden Systems zu befreien, ist nur scheinbar paradox. Wir werden uns an zwei verschiedenen Beispielen klar machen, daß dieses Phänomen zwei ganz verschiedene Ursachen haben kann — aber in beiden Fällen bis zu einem gewissen Grade anschaulich deutbar ist.

Wir werden stets ein Elektron im Bereiche eines geeigneten kugelsymmetrischen Potentials betrachten, also die Wellengleichung

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi + (V(r) - E)\,\psi = 0 .$$

$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right.$, da wir uns auf kugelsymmetrische ψ beschränken und die Ableitungen nach den Winkeln θ und φ weglassen können). Damit $E = 0$ ein Punkteigenwert mit der kugelsymmetrischen Eigenfunktion $\psi = \psi(r)$ sei, muß also $V = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\left(\frac{\psi''}{\psi} + \frac{2\psi'}{r\psi}\right)$ sein. Wir werden nun durch geeignete Wahl von ψ dem V die oben erwähnten, scheinbar paradoxen, Formen erteilen.

Sei zuerst $\psi = \frac{\sin(r^3)}{r^2}$, dann ergibt sich[1]) (unter Weglassung des unwesentlichen Faktors $\left.\frac{h^2}{8\pi^2 m}\right)$ $V = 2r^{-2} - 9r^4$. Ein ebener Schnitt durch den Potentialverlauf sieht also wie auf der Figur angedeutet aus. Nach allem Erwarten müßte das Elektron den Potentialabhang hinabstürzen und daher nur ein Streckenspektrum besitzen — dennoch ist eine stationäre Bahn und der Punkteigenwert $E = 0$ da!

Jedoch ist dieses Verhalten sogar auf Grund klassisch-mechanischer Analogien zu verstehen[2]).

1) Man setze versuchsweise $\psi(r) = r^a \sin(r^b)$. Damit das Quadratintegral von ψ, d.h. $\int_0^\infty 4\pi r^2 (\psi(r))^2 dr = \int_0^\infty 4\pi r^{a+2} \sin^2(r^b)\, dr$ endlich sei, muß mit Rücksicht auf das Verhalten bei $r = 0$: $2a + b + 2 > -1$ und auf das Verhalten bei $r = \infty$: $2a + 2 < -1$ sein. Die Regularität von $V(r)$ für $r \neq 0$ erfordert $2a + b + 1 = 0$. Beides erfüllt $a = -2$, $b = 3$.

2) Diese Bemerkung rührt von Herrn L. Szilard her.

Auf dem Potentialabhang $V = 2r^{-2} - 9r^4$ wird ein Punkt (falls er sich längs einer durch die den Nullpunkt gehenden Geraden bewegt) die Bahn

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V(r) = \text{Konst.}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\,\text{Konst.} - \frac{4}{m}\frac{1}{r^2} + \frac{18}{m}r^4}$$

beschreiben.

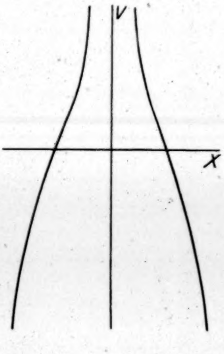
Man erkennt leicht, daß schließlich $r \to \infty$, $\frac{dr}{dt} \to \infty$, und dann ist asymptotisch

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{m}}r^2;\quad \frac{1}{r} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{m}}(t_0 - t)$$

$$r = \frac{\sqrt{m}}{3\sqrt{2}\,(t_0 - t)}$$

Der Punkt geht also noch in der endlichen Zeit $t = t_0$ ins Unendliche.

In diesem Moment hören nun die Aussagen der klassischen Mechanik auf. Es scheint aber, als ob die Quantenmechanik sich durch diese



Flucht des zu untersuchenden Punktes ins Unendliche nicht davon abhalten ließe, sein ferneres Schicksal zu verfolgen. Die stationäre Lösung $\psi(r)$ deutet an, daß er aus dem Unendlichen wiederkehrt, daß er dort sozusagen reflektiert wird — um dann das Pendeln wieder zu beginnen. Daß $\psi(r)$ für $r = \infty$ gegen 0 strebt, d. h. daß sich der Punkt vorwiegend bei mäßig großen r aufhält, rührt daher, daß er bei großen Werten enorme Geschwindigkeiten hat (er ist ja bis dahin einen großen Potentialberg hinuntergestürzt), also nur kurze Verweilzeiten. Da der ganze Pendelvorgang (von $r_{\min}$ nach ∞ und zurück) periodisch ist, ist es sehr vernünftig, daß das entsprechende quantenmechanische Problem eine stationäre Lösung besitzt.

Ein weiterer Beleg dafür, daß die Stationarität dieser Bahn wirklich nur durch die klassische Analogie einer Reflexion im Unendlichen verständlich ist, ergibt sich, wenn man im Sinne von Anm. [1]) der vorigen Seite allgemeiner $\psi = \frac{\sin(r^b)}{r^{1/2(b+1)}}$ $(b > 2)$ setzt, dann wird $V = (b^2 - 1)(4r^2)^{-1} - b^2 r^{2b-2}$. Man erkennt mühelos, daß bei klassisch-mechanischer Bewegung die fürs Erreichen des Unendlichen in endlicher Zeit charakteristische Bedingung $b > 2$ ist — genau das, was zur Endlichkeit des Quadratintegrals von ψ, d. h. für die Stationarität dieser Bahn, notwendig und hinreichend ist.

2. Wir gehen nun zu einem zweiten Beispiel über, das auf Grund solcher Erwägungen nicht mehr zu deuten ist.

Zuerst setzen wir $\psi = \frac{\sin r}{r}$, dann wird $V = -1$. Es ist die wohlbekannte Kugelwellenlösung, einem sich ins Unendliche entfernenden Elektron entsprechend, die Energie $E = 0$ ist dabei größer als das Potential $V = -1$, so daß ein positiver Betrag für die klassische kinetische Energie übrigbleibt. Wir sind dabei im kontinuierlichen Spektrum, da $\int_0^\infty 4\pi r^2 |\psi(r)|^2 dr = 4\pi \int_0^\infty \sin^2 r\, dr$ unendlich ist. Nun werden wir aber versuchen, ψ so abzuändern, daß sein Quadratintegral endlich wird und V doch in der Nähe von -1 variiert.

Hierzu machen wir den Ansatz:

$$\psi(r) = \frac{\sin r}{r} f(r).$$

Wenn $f(r)$ stetig ist und für $r \to \infty$ einem r^a mit $a < -\frac{1}{2}$ asymptotisch gleich ist, so ist das Quadratintegral von ψ in der Tat endlich. V dagegen bestimmt sich zu

$$V = -1 + 2\,\text{tg}\,r\frac{f'(r)}{f(r)} - \frac{f''(r)}{f(r)}.$$

Damit dieses V ständig in der Nähe von -1 bleibt, und (was wir zusätzlich verlangen wollen) für $r \to \infty$ gegen -1 konvergiert, müssen $\text{tg}\,r\frac{f'(r)}{f(r)}$, $\frac{f''(r)}{f(r)}$ stets klein sein, und für $r \to \infty$ gegen 0 streben.

In erster Linie muß also $\frac{f'(r)}{f(r)}$ für $\text{tg}\,r = \infty$, d. i. $r = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ verschwinden, d. h. für $\cos r = 0$. Das ist gewiß der Fall, wenn $f(r)$ dem

$\int\limits_0^r \cos^2 r\, d r = \frac{r}{2} + \frac{1}{4} \sin 2r$ gleich ist, oder irgendeiner Funktion davon. Wir setzen (da $f(r)$ für $r \to \infty$ asymptotisch r^a, $a < -\frac{1}{2}$ sein soll) $f(r) = [A^2 + (2r + \sin 2r)^2]^{-1}$, wo über A noch verfügt werden wird. Dann ist:

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{8(2r + \sin 2r)\cos^2 r}{A^2 + (2r + \sin 2r)^2}$$

$$\frac{f''(r)}{f(r)} = \frac{128\,(2r + \sin 2r)^2 \cos^4 r}{[A^2 + (2r + \sin 2r)^2]^2}$$

$$- \frac{32 \cos^4 r - 16\,(2r + \sin 2r) \cos r \sin r}{A^2 + (2r + \sin 2r)^2}$$

Hieraus folgt (es heben sich zwei Glieder weg, was aber unwesentlich ist)

$$V = -1 - \frac{32 \cos^4 r}{A^2 + (2r + \sin 2r)^2} + \frac{128\,(2r + \sin 2r)^2 \cos^4 r}{[A^2 + (2r + \sin 2r)^2]^2}$$

$$= -1 - 32 \cos^4 r \, \frac{A^2 - 3\,(2r + \sin 2r)^2}{[A^2 + (2r + \sin 2r)^2]^2}$$

Diesem Ausdruck sieht man es aber sofort an, daß erstens zu jedem $\varepsilon > 0$ ein A gewählt werden kann, daß er stets zwischen $-1 - \varepsilon$ und $-1 + \varepsilon$ liegt, und daß er zweitens für $r \to \infty$ gegen -1 strebt[1]).

Ein

$$\psi = \frac{\sin r}{r\,(A^2 + (2r + \sin 2r)^2)}$$

mit genügend großem A leistet also alles Gewünschte.

Eine Deutung wie im vorigen Punkt kommt hier nicht in Frage: V schmiegt sich ja beliebig gut an -1 an! Das einzige, was sich in Anlehnung an allgemein geläufige anschauliche Betrachtungsweisen vorbringen ließe, ist dieses: Das obige Potential V weist gewisse Wellungen mit der Periode π auf ($\cos^2 r$ und $\sin 2r$ gehen in die Formel ein), welche mit $r \to 0$ gegen 0 abfallen. Diese scheinen nun eine interferenzartige Auslöschung des Wellenpaketes ψ in den entfernteren Raumgegenden zu veranlassen[2]).

So wie wir hier in der Nähe des Potentials $V = -1$ eines mit stationären Bahnen fanden, lassen sich auch in der Nähe anderer Potentiale, z. B. $V = x$ solche angeben. Dies ist darum erwähnenswert, weil es zeigt, daß eine Diskussion der Frage, ob das durch ein homogenes elektrisches Feld gestörte Wasserstoffatom (Starkeffekt) Punkteigenwerte besitzt oder nicht, mit gewissen Schwierigkeiten verbunden ist[1]). Insbesondere muß dabei die „Glattheit" des elektrischen Störungsfeldes eine wesentliche Rolle spielen.

1) Ebenso liegen alle seine Derivierten beliebig nahe bei 0.

2) Das Potential $V(r) = 2r^{-2} - 9r^4$ war nicht so, es war vollkommen „glatt".

1) Vgl. J. R. Oppenheimer, Phys. Rev. **31**, 80, 1928, wo die Annahme des Fehlens von Punkteigenwerten gemacht wird.

(Eingegangen 25. Mai 1929.)

Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen.

Von J. v. Neumann und E. Wigner.

1. In vielen Fragen der Quantenmechanik ist es wichtig, die Veränderung der Eigenwerte und Eigenfunktionen bei stetiger Änderung eines oder mehrerer Parameter zu untersuchen. Namentlich interessiert oft der Fall, in dem man für zwei spezielle Werte der Parameter Eigenwerte und Eigenfunktionen kennt und sich für das Zwischengebiet interessiert. Man fragt gewöhnlich, ob im Zwischengebiet Überschneidungen der Eigenwerte vorkommen, in welchen Eigenwert ein bestimmter Eigenwert übergeht, wenn man von dem einen Wertsystem der Parameter kontinuierlich in das andere Wertsystem übergeht usw. Fragen ähnlicher Art hat F. Hund aufgeworfen[1]) und insbesondere die letzte Frage für den Fall eines Parameters — auf Grund von Beispielen — dahin beantwortet, daß Überschneidungen im allgemeinen — wenn dafür kein spezieller Grund vorhanden ist — nicht vorkommen[2]). Wir wollen hier dies allgemein begründen, unsere Methode erlaubt dabei gleichzeitig die Untersuchung von Systemen mit mehreren veränderlichen Parametern.

Die Energiewerte eines Systems sind bekanntlich die Eigenwerte einer Hermiteschen[3]) Matrix $(H_{\nu\mu})$, die wir der Einfachheit halber endlichvieldimensional, etwa n-dimensional, annehmen wollen. Dabei müssen wir uns vorstellen, daß alle n^2 komplexen Größen $H_{\nu\mu}$ noch von einigen reellen Parametern $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ abhängen, und wir fragen, durch Änderung wie vieler Parameter man im allgemeinen ein Zusammenfallen zweier Eigenwerte erreichen kann. Wir werden sehen, daß dazu im allgemeinen drei reelle Parameterwerte ent-

1) F. Hund, Zeitschr. f. Phys. **40**, 742, 1927.

2) Siehe insbesondere S. 752.

3) Daß die Matrix Hermiteisch ist, ist entscheidend für das Folgende.

sprechend bestimmt werden müssen („im allgemeinen" bedeutet, daß zwischen den Zahlen $H_{\nu\mu}$ keine Beziehungen bestehen, die nicht aus dem Hermiteschen Charakter folgen)[1]). *Wenn man also nur einen oder zwei Parameter verändern kann, ist es i. a. nicht möglich, ein Überschneiden der Eigenwerte zu erreichen.*

Um dies zu zeigen, zählen wir die freien reellen Parameter einer n-dimensionalen Hermiteschen Matrix mit und ohne doppelte Eigenwerte ab. Die Differenz dieser Zahlen wird uns die Anzahl der zu verändernden Parameter $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ angeben, durch deren Veränderung man ein Zusammenfallen von Eigenwerten bewirken kann.

Man kann bekanntlich jede Hermitesche Matrix $(H_{\nu\mu})$ durch eine unitäre Matrix $(U_{\varrho\nu})$ auf die Diagonalform bringen

$$H_{\nu\mu} = \sum_{\varrho} E_\varrho U_{\varrho\nu} \bar{U}_{\varrho\mu} \tag{1}$$

wo $E_1, E_2, \ldots$ die Eigenwerte sind. Zur Bestimmung der $H_{\nu\mu}$ muß man also die n reellen Zahlen E_ϱ und die unitäre Matrix $(U_{\varrho\nu})$ kennen, diese letztere allerdings nur bis auf eine unitäre Matrix, die mit der Diagonalmatrix

$$\left|\begin{array}{cccccc} E_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & E_n \end{array}\right| \tag{2}$$

vertauschbar ist. Mit einer solchen darf man nämlich $(U_{\varrho\nu})$ von hinten multiplizieren, ohne daß (1) sich ändern würde. Da eine unitäre Matrix n^2 reelle Parameter hat, ist die Anzahl der freien Parameter einer Hermiteschen Matrix $n^2 + f - v$ wo f die Anzahl der voneinander verschiedenen Zahlen unter $E_1, E_2, \ldots, E_n$ und v die Anzahl der Parameter einer mit (2) vertauschbaren unitären Matrix ist. Sind alle $E_1, E_2, \ldots, E_n$ verschieden, so ist mit (2) nur eine Diagonalmatrix vertauschbar, kann man dagegen die E_ϱ in Gruppen einteilen, etwa so, daß in den umrahmten Quadraten lauter gleiche E vorkommen

$$\begin{array}{|cc|ccc|c|c|} \hline E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & \ldots & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\cdot & E_f \\ \hline \end{array} \tag{3}$$

so ist mit (3) jede Matrix vertauschbar, die nur an den den umrahmten Stellen entsprechenden Stellen von 0 verschiedene Koeffizienten hat. Soll die Matrix unitär sein, so müssen in den umrahmten Quadraten unitäre Matrizen stehen.

Kann man also die Eigenwerte in Gruppen mit $g_1, g_2, \ldots, g_f$ $(g_1 + g_2 + \ldots + g_f = n)$ Eigenwerten einteilen, so daß alle Eigenwerte derselben Gruppe gleich sind, so ist die Anzahl der freien Parameter gleich

$$n^2 + f - g_1^2 - g_2^2 - \ldots - g_f^2.$$

In der allgemeinen Hermiteschen Matrix ist $g_1 = g_2 = \ldots = g_n = 1$, die Anzahl der freien Parameter ist $n^2 + n - 1^2 - 1^2 - \ldots - 1^2 = n^2$, wie man auch auf anderem Wege leicht abzählt[1]). Sollen aber zwei Eigenwerte zusammenfallen, so ist $g_1 = 2$, $g_2 = g_3 = \ldots = g_{n-1} = 1$, die Anzahl der freien Parameter ist $n^2 + (n-1) - 2^2 - 1^2 - 1^2 - \ldots - 1^2 = n^2 + (n-1) - 4 - (n-2) = n^2 - 3$. Man sieht auch etwa für $n = 2$, daß nur *ein* reeller Parameter p frei ist, da nur die Matrix $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$ einen doppelten Eigenwert hat. Man kann also im allgemeinen nur durch Veränderung von drei Parametern ein Zusammenfallen von zwei Eigenwerten erreichen.

Haben wir es mit einer *reellen Hermiteschen Matrix* zu tun, so ändert sich an dem Vorangehenden nur das, daß man überall reelle orthogonale Matrizen an die Stelle der unitären setzen muß. Die Anzahl der freien Parameter einer reellen orthogonalen Matrix von n Dimensionen ist $\frac{1}{2} n(n-1) = \binom{n}{2}$, so daß die Anzahl der freien Parameter im reellen Fall $\binom{n}{2} + f - \binom{g_1}{2} - \binom{g_2}{2} - \ldots - \binom{g_f}{2}$ beträgt. Für die allgemeine reelle symmetrische Matrix ergibt dies $\frac{1}{2} n(n+1)$; soll ein doppelter Eigenwert da sein, so haben wir $\frac{1}{2} n(n+1) - 2$: *in diesem Fall genügt es schon, zwei reelle Parameter zu verändern dürfen,* um zwei Eigenwerte zum Zusammenfallen zu bringen.

Bei der Analyse der Struktur der Terme atomarer Systeme konnten die Eigenwerte in verschiedene Gruppen eingeteilt werden, jede Gruppe war etwa durch eine azimutale Quantenzahl, den Spiegelungscharakter, und das Multiplettsystem gekennzeichnet und solange die bezügliche Sym-

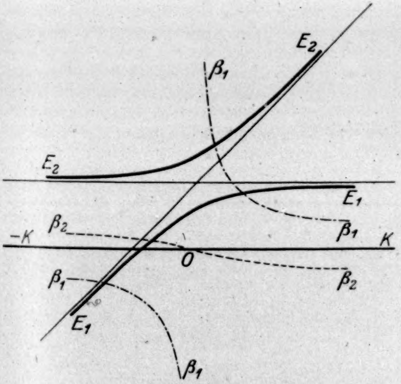
1) Man sollte meinen, daß das Zusammenfallen von zwei (natürlich reellen) Eigenwerten nur eine reelle Bedingung ergibt. Es soll aber gerade gezeigt werden, daß ein singulärer Fall vorliegt und sich die Zahl der Bedingungen so erhöht.

1) Es sind n reelle Diagonalelemente und $\frac{1}{2}(n-1)n$ komplexe Elemente oberhalb der Hauptdiagonale.

metrie nicht gestört wird, hat kein Term der einen Gruppe irgendeine „Kenntnis" von den Termen der anderen Gruppe[1]). Terme verschiedener Gruppen (d. h. verschiedener Transformationseigenschaft) haben sich beliebig überkreuzt. Außerdem waren sämtliche Terme der meisten Gruppen mehrfach entartet. Dies steht jedoch in keinem Widerspruch zu dem Vorangehenden, da hier das „im allgemeinen" nicht zutrifft, da eine genügende Anzahl von Matrixelementen immer identisch verschwindet. Ebenso wie in der Gruppentheorie der Terme angenommen werden konnte, daß keine „zufälligen Entartungen" vorkommen, können wir hier annehmen, daß keine Beziehungen existieren, die nicht aus der Symmetrie des Systems auf gruppentheoretischem Wege folgen würden, also, daß innerhalb einer Termgruppe immer der „allgemeine Fall" vorliegt.

2. Für den Fall von zwei nahe aneinander vorbeigehenden Eigenwerten wollen wir die Verhältnisse noch rechnerisch verfolgen. Dazu benutzen wir das Schrödingersche Störungsverfahren[2]), indem wir die Veränderung der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators $H + \varkappa V$ bei wachsendem $\varkappa$ betrachten, wobei wir jedoch annehmen, daß die Entfernung von zwei Eigenwerten — etwa E_1 und E_2 — in der Größenordnung von $\varkappa V_{11}$ oder $\varkappa V_{22}$ liegt.

In der Figur sind die Eigenwerte als Funktion von[3]) $\varkappa$ (die ausgezogenen Kurven) aufgetragen. Es ist dabei das ursprüngliche $\varkappa$ so durch eine



1) Siehe z. B.: E. Wigner, Zeitschr. f. Phys. **40**, 883, 1927 (S. 892) und **43**, 624, 1927.

2) Sie ist hier mit dem Born, Heisenberg, Jordanschen identisch.

3) In der Figur steht K und $-K$ an Stelle von $\varkappa$ und $-\varkappa$.

neue Variable $\varkappa + c$ ersetzt, daß für $\varkappa = 0$ die beiden Kurven parallel verlaufen.

Für $\varkappa = 0$ seien die Eigenfunktionen $\varphi_1(0) = \psi$ und $\varphi_2(0) = \psi'$ die Eigenwerte $E_1(0) = E - \varepsilon$ und $E_2(0) = E + \varepsilon$. Dann setzen wir an

$$\begin{aligned} \varphi_1(\varkappa) &= \alpha_1(\varkappa)\psi + \alpha_1'(\varkappa)\psi' + \sum_\nu a_{1\nu}(\varkappa)\psi_\nu \\ \varphi_2(\varkappa) &= \alpha_2(\varkappa)\psi + \alpha_2'(\varkappa)(\psi' + \sum_\nu a_{2\nu}(\varkappa)\psi_\nu \end{aligned} \tag{4}$$

und erhalten, indem wir dies in

$$\begin{aligned} (H + \varkappa V)\varphi_1(\varkappa) &= E_2(\varkappa)\varphi_1(\varkappa) \\ (H + \varkappa V)\varphi_2(\varkappa) &= E_2(\varkappa)\varphi_2(\varkappa) \end{aligned} \tag{5}$$

einführen und

$$\begin{aligned} (\psi, V\psi) = v\,; \quad (\psi', V\psi') = v'' \\ (\psi', V\psi) = v'\,; \quad (\psi, V\psi') = (V\psi, \psi') = \tilde{v}' \end{aligned} \tag{6}$$

setzen, in bekannter Weise (durch Koeffizientenvergleich) für $E_1(\varkappa)$

$$\begin{aligned} (E - \varepsilon + \varkappa v - E_1(\varkappa))\alpha_1(\varkappa) + \varkappa\tilde{v}'\alpha_1'(\varkappa) = 0 \\ \varkappa v'\alpha_1(\varkappa) + (E + \varepsilon + \varkappa v'' - E_1(\varkappa))\alpha_1'(\varkappa) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Die Determinante dieses Gleichungssystems Null gesetzt ergibt für $E_1(\varkappa)$ (unter Beachtung von $v = v''$, was aus der Parallelität der $E_1(\varkappa)$ und $E_2(\varkappa)$ Kurven für $\varkappa = 0$ folgt)

$$E_1(\varkappa) = E + \varkappa v - \sqrt{\varepsilon^2 + \varkappa^2 |v'|^2} \tag{8}$$

und entsprechend für $E_2(\varkappa)$

$$E_2(\varkappa) = E + \varkappa v + \sqrt{\varepsilon^2 + \varkappa^2 |v'|^2}. \tag{8a}$$

Die beiden Kurven $E_1(\varkappa)$ und $E_2(\varkappa)$ bilden also die beiden Äste einer Hyperbel. Die Steigung der beiden Asymptoten ist $v - |v'|$ bzw. $v + |v'|$, die minimale Entfernung der beiden Äste 2ε, die Entfernung nimmt auf das Doppelte zu, wenn $\varkappa = \frac{\sqrt{3}\,\varepsilon}{|v'|}$ wird, die Dauer des Vorbeigehens ist $\Delta\varkappa \sim \frac{2\sqrt{3}\,\varepsilon}{|v'|}$.

Die Eigenfunktionen $\varphi_1(\varkappa)$ und $\varphi_2(\varkappa)$ sind — wenn man sich auf die erste Näherung beschränkt — nach (4) Linearkombinationen von ψ und ψ', zu ihrer Kennzeichnung genügt es

$$\beta_1(\varkappa) = \frac{\alpha_1(\varkappa)}{\alpha_1'(\varkappa)} \quad \text{und} \quad \beta_2(\varkappa) = \frac{\alpha_2(\varkappa)}{\alpha_2'(\varkappa)} \tag{9}$$

zu berechnen. Diese ergeben sich zu

$$\beta_1(\varkappa) = \frac{\varkappa\tilde{v}'}{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + \varkappa^2|v'|^2}} = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \varkappa^2|v'|^2}}{\varkappa v'} \tag{10}$$

$$\beta_2(\varkappa) = \frac{\varkappa\tilde{v}'}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \varkappa^2|v'|^2}} = \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + \varkappa^2|v'|^2}}{\varkappa v'} \tag{10a}$$

und sind in der Figur gestrichelt aufgetragen, wobei natürlich v' reell angenommen werden mußte.

Man sieht, daß für sehr kleine $\varkappa$

$$\beta_1(-\infty) = \frac{\bar{v}'}{|v'|}; \; \beta_2(-\infty) = -\frac{\bar{v}'}{|v'|}, \tag{11}$$

während für sehr große $\varkappa$

$$\beta_1(\infty) = -\frac{\bar{v}'}{|v'|}; \; \beta_2(\infty) = \frac{\bar{v}'}{|v'|}, \tag{11a}$$

gilt, so daß β_1 in β_2 und β_2 in β_1 übergeht. Für $\varkappa$ für die $|\varkappa v'| \gg 1$ ist, verhalten sich Eigenwerte und Eigenfunktionen so, als ob sie sich überkreuzen würden[1]).

Die v, v' sind die Matrixelemente von V berechnet mit denjenigen Eigenfunktionen ψ, ψ', die die richtigen Linearkombinationen für $\varkappa = 0$ sind. Es ist oft nützlich, den kleinsten Abstand 2ε und $\Delta\varkappa$, die „Dauer des Vorbeigehens" mit den Matrixelementen V_{11}, $V_{12} = \bar{V}_{21}$, V_{22} auszudrücken, die mit Hilfe der Eigenfunktionen bei einem beliebigen $\varkappa$ gebildet werden können.

Man erhält nach etwas umständlicher Rechnung für die kleinste Entfernung der Eigenwerte

$$(E_2 - E_1)_{\min} = 2\varepsilon = \sqrt{\frac{|V_{12}|^2 (E_2 - E_1)^2}{\frac{1}{4}(V_{11} - V_{22})^2 + |V_{12}|^2}} \tag{12}$$

für $\Delta\varkappa$, die Dauer des Vorbeigehens

$$\Delta\varkappa = \frac{2\sqrt{3}\,\varepsilon}{|v'|} = \frac{\sqrt{3}(E_2 - E_1)\,|V_{12}|}{\frac{1}{4}(V_{11} - V_{22})^2 + |V_{12}|^2}. \tag{13}$$

Der Wert $(E_2 - E_1)_{\min}$ wird für

$$\varkappa = \frac{1}{4}\,\frac{(V_{11} - V_{22})(E_2 - E_1)}{\frac{1}{4}(V_{11} - {}_{22})^2 + |V_{12}|^2} \tag{14}$$

angenommen. Ist $V_{12} = 0$ wie immer, wenn E_1 und E_2 in verschiedene Termgruppen gehören, so wird sowohl (12) als auch (13) gleich 0; das sind dann ausnahmsweise doch die Verhältnisse der Überkreuzung.

Wird der Parameter $\varkappa$ nicht nur gedanklich aufgefaßt, sondern ändert man ihn wirklich am mechanischen System selber, so erfolgt die Änderung adiabatisch (d. h. $\varphi_1(-\infty)$ geht in $\varphi_1(\infty)$ und $\varphi_2(-\infty)$ — in $\varphi_2(\infty)$ über), wenn

$$\Delta\varkappa \gg \frac{h}{2\varepsilon}\,\frac{d\varkappa}{dt} \tag{15}$$

ist; ist dagegen

$$\Delta\varkappa \ll \frac{h}{2\varepsilon}\,\frac{d\varkappa}{dt}, \tag{16}$$

so geht $\varphi_1(-\infty)$ in $\varphi_2(\infty)$, $\varphi_2(-\infty)$ in $\varphi_1(\infty)$ über. In diesem Fall hat die Wellenfunktion keine Zeit sich zu ändern.

3. Eine Anwendung kann das Vorangehende vor allem auf Zuordnungsfragen finden. U. a. folgt die Zuordnungsregel für den Übergang von schwachen in starke Magnetfelder[1]). Terme mit gleichem m überkreuzen sich nicht. Sogar bei gleichzeitiger Änderung eines magnetischen und in derselben Richtung liegenden elektrischen Feldes wird man keine Überkreuzung erreichen können, da die Differentialgleichung komplex ist und zur Erreichung einer Überkreuzung drei Parameter notwendig wären. Ändert man auch den Winkel der beiden Felder, so läßt sich eine Überkreuzung erzwingen.

Bei der Anwendung auf Fragen der Zuordnung von Molekeltermen zu Termen getrennter Atome sind jedoch die Bemerkungen von F. Hund[2]) zu berücksichtigen, unsere Formeln (12), (13) gestatten prinzipiell eine Übersicht der Verhältnisse.

Auch für den Adiabatensatz dürfte das Vorangehende nicht ganz ohne Belang sein, da die Verhältnisse bei „Überkreuzungen" wohl niemals ganz klar waren.

Die wichtigste Anwendung scheint sich aber bei der Londonschen Theorie der chemischen Reaktion zu ergeben[3]). Wir wollen darauf hier nicht näher eingehen, nur auf folgenden Umstand hinweisen: Im l. c. betrachteten Falle dreier Atome, deren eines in einer durch die beiden anderen gelegten Ebene beweglich ist, haben wir zwei freie Parameter, etwa die X und Y Koordinate des beweglichen Atoms. Da die Differentialgleichung reell ist, ist ein Zusammenfallen zweier Eigenwerte zwar möglich, aber nur in einzelnen Punkten. In der Tat kommt es nach F. London in erster Näherung nur in einem einzelnen Punkt vor. Es gilt das nun nach dem Vorangehenden streng, d. h. in beliebig hoher Näherung. Man kann also eine untere und eine obere Energiefläche unterscheiden, die nur einzelne Punkte gemeinsam haben. Diese Betrachtung läßt sich noch verallgemeinern und gestattet dann einen Einblick in den Mechanismus mehratomiger Systeme.

1) Auf diesen Punkt hat bereits F. Hund wiederholt hingewiesen.

1) A. Sommerfeld, Zeitschr. f. Phys. 8, 257, 1922; A. Landé, Zeitschr. f. Phys. 19, 112, 1923.

2) Zeitschr. f. Phys. 52, 601, 1928. Bei streng adiabatischer Auseinanderführung der Atome würden sich nach dem Vorangehenden — wegen der Spinwechselwirkung — auch Terme verschiedener Multiplettsysteme nicht kreuzen. In diesem Fall ist jedoch die Exzentrizität der Hyperbel (wegen der Kleinheit von V_{12}, der Spinwechselwirkung) so klein, daß die Hyperbel praktisch in zwei sich schneidende Gerade ausartet. Dasselbe muß nach F. London für zwei Terme gelten, deren einer zwei aneinandergebrachten Atomen (K und F) und deren anderer zwei aneinandergebrachten Ionen (K^+ und F^-) entspricht, wenn die Überschneidung in großer Entfernung erfolgt (Zeitschr. f. Phys. 46, 455, 1928, S. 475).

3) F. London, Sommerfeld Festschrift. S. 104 S. Hirzel. 1929.

(Eingegangen 25. Mai 1929.)

Über die Beziehung zwischen Widerstand und Wärmeübergang bei der Strömung in Rohren.

Von L. Schiller und Th. Burbach.

Vor einiger Zeit haben wir an dieser Stelle[1]) einen Weg gezeigt, um zu einer für alle Flüssigkeiten gültigen Gleichung zu kommen, die den Wärmeübergang aus dem Strömungswiderstand zu berechnen gestattet. Etwas später hat der eine von uns an gleicher Stelle[2]) auf Grund einer Ähnlichkeitsbetrachtung die Voraussetzung für die Gültigkeit jener Gleichung etwas schärfer formuliert.

Im Hinblick auf das Folgende seien die Ergebnisse kurz wiederholt. Man erhält die Gleichung:

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{\psi^{(\text{Pé})}}{4} \cdot \text{Pé},$$

worin α die Wärmeübergangszahl, d den Rohrdurchmesser und ψ (Pé) den Widerstandskoeffizienten aus der Gleichung des hydraulischen Widerstands bedeutet, genommen für Rey = Pé. Als Voraussetzung für die Zulässigkeit dieser Gleichung ergab sich die Forderung, daß das turbulente Geschwindigkeitsprofil der vorhandenen Strömung (Rey_1) ähnlich dem Profil der in die Formel eingehenden Strömung ($\text{Rey}_2 = \text{Pé}$) ist (z. B. $^1/_7$-Potenzgesetz). Statt dessen können wir im Sinn der Prandtl-Kármánschen Ähnlichkeitsbetrachtung auch fordern, daß das Widerstandsgesetz die Form eines einfachen Potenzgesetzes hat (z. B. Blasiussches Gesetz). Wir haben a. a. Ort[1]) zunächst das Blasiussche Gesetz zugrunde gelegt, jedoch bereits darauf hingewiesen, daß natürlich unsere Ableitung sofort auch auf andere Gesetze anwendbar sei. Kürzlich hat nun Herr Tarassenko — ohne über unsere Arbeit hinausgehende methodische Neuerungen — die entsprechende Formel für das $^1/_8$-Potenzgesetz aufgestellt[3]), die ja wohl entsprechend den neueren hydraulischen Messungen für höhere Reynoldssche Zahlen in einem gewissen Bereich besser stimmen kann. Aber die Gesamtheit dieser neueren hydraulischen Ergebnisse über das Widerstandsgesetz der Rohrströmung (Stanton and Pannell, Jakob und Erk) läßt erkennen, daß wir es nicht mit einem einheitlichen Potenzgesetz zu tun haben, daß also weder das $^1/_7$- noch das $^1/_8$-Potenzgesetz über größere Bereiche wirklich gute Resultate wird liefern können. Und es erhebt sich demgemäß die Frage, ob es nicht doch möglich ist, einen Weg zu finden, um auch bei Nichtexistenz eines einfachen Potenzgesetzes, sondern bei einem verwickelter gebauten, zu einer entsprechenden Beziehung zwischen Wärmeübergang und Widerstand zu kommen.

Dies erscheint nun tatsächlich möglich auf Grund folgender Überlegung. Das Ergebnis der oben genannten Ähnlichkeitsbetrachtung[2]) war, daß ein dem vorhandenen Temperaturfeld ähnliches Geschwindigkeitsfeld existiert, und zwar bei einer Reynoldsschen Zahl bestimmt durch Rey = Pé, unter der Voraussetzung, daß deren turbulentes Kernprofil dem vorhandenen Geschwindigkeitsprofil ähnlich ist (d. h. einfaches Potenzgesetz für den Widerstand). Da diese Voraussetzung tatsächlich nicht erfüllt ist, existiert auch das entsprechende Geschwindigkeitsfeld spontan tatsächlich nicht. Wir können es uns jedoch durch einen entsprechenden Mechanismus hervorgebracht denken. Für dieses „künstlich hervorgebrachte" Profil machen wir nun die naheliegende Annahme, daß auch für diese Strömung die Prandtl-Kármánsche Ähnlichkeitsbetrachtung gültig sei, d. h. daß die ψ — Rey-Kurve (Fig. 1 schematisch) zwischen den beiden Reynoldsschen Zahlen Rey_1 und $\text{Rey}_2 = \text{Pé}$ in logarithmischer Darstellung eine Gerade wäre, und zwar, da ja die Neigung der ψ — Rey-Kurve die Geschwindigkeitsverteilung bestimmt und wir von der gegebenen Geschwindigkeitsverteilung ausgehen müssen, eine Gerade mit der Neigung der Tangente an der Stelle Rey_1. Der Schnittpunkt der Tangente an Rey_1 mit der Senkrechten $\text{Rey}_2 = \text{Pé}$ liefert dann $\psi_{\text{Rey}_2 = \text{Pé}}$ d. h. den ψ-Wert, den wir für unsere Gleichung brauchen.

Da $\text{Pé} = \frac{\text{Rey}}{\text{Pr}}$ ist, worin Pr[4]) $= \frac{\lambda}{c\mu}$ (c = spez. Wärme, μ = Zähigkeit), so wird für Pr = 1 (annähernd für Gase) $\text{Pé} = \text{Rey}_1 = \text{Rey}_2$, und je kleiner bei festem Rey_1 Pr wird, desto größer

---

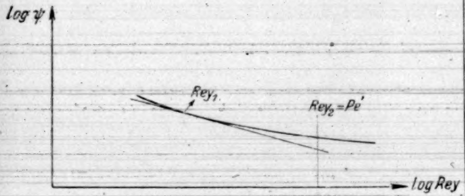
1) L. Schiller u. Th. Burbach, Wärmeübergang strömender Flüssigkeit in Rohren. Physik. Zeitschr. **29**, 340—342. 1928.

2) L. Schiller: „Zwei neue Ähnlichkeitsgesetze für das Temperaturfeld turbulent strömender Flüssigkeiten und ihre Bedeutung für den Wärmeübergang." Physik. Zeitschr. **29**, 690—691. 1928. S. auch Z. a. M. M. **8**, 453. 1928.

3) S. Tarassenko, „Über den Wärmeaustausch bei turbulenter Strömung einer Flüssigkeit oder eines Gases". Physik. Zeitschr. **30**, 252—256, 1929. Herr Tarassenko lehnt sich hierin mehrfach so stark gerade an unsere oben genannte Arbeit[1]) an, daß wir uns wundern, sie nicht von ihm genannt zu sehen. Lediglich in der Zusammenfassung am Schluß wird der Name des einen von uns mit einer anderen Literaturstelle genannt.

4) Wir übernehmen sehr gern von Herrn Tarassenko die Bezeichnung „*Pr*" für diese bisher σ bezeichnete Zahl, da ihre besondere Bedeutung in Prof. Prandtls grundlegender Untersuchung erstmals gezeigt wird.

wird Pé und auch $Rey_2 = Pé$, d. h. desto weiter rückt Pé auf der Tangente nach rechts und desto weiter entfernt sich $\frac{\alpha d}{\lambda}$ von dem Wert für $Pr = 1$ nach größeren Werten, und je kleiner — bei festem Pé — Pr ist, desto kleiner ist Rey_1 und $\frac{\alpha d}{\lambda}$. Auf diese Weise wird also jetzt wieder, wie es der all-



gemeinen strengen Ähnlichkeitsbetrachtung entspricht, $\frac{\alpha d}{\lambda}$ eine Funktion der beiden Variablen Rey und Pr[5]), während bei Vorhandensein eines reinen Potenzgesetzes (für beliebige Pr) oder für den Fall $Pr = 1$ (bei beliebigem Widerstandsgesetz) sich bei unserer Theorie $\frac{\alpha d}{\lambda}$ auf die Funktion einer Variablen (Pé) reduziert. Um einen quantitativen Überblick zu geben, ist in Tab. I $\frac{\alpha d}{\lambda}$ als Funktion von Rey und Pr, in Tab. II als

Tabelle I.

$Rey = \frac{u \cdot d}{\nu}$	$Pr = 1$	$Pr = 1/2$	$Pr = 1/4$	$Pr = 1/10$
$20 \cdot 10^3$	65	109	184	362
40	110	186	318	640
60	149	257	434	890
80	188	322	560	1146
100	223	385	662	1383
160	324	564	982	2052
200	386	673	1186	2470
400	681	1200	2108	4480
600	951	1677	2982	6375
800	1206	2132	3784	8040
1000	1448	2565	4570	9700
1200	1680	2982	5280	11340

Funktion von Pé und Pr, in größerem Bereich aufgeführt. Die Berechnung stützt sich auf neuere, nach größeren Rey-Werten hin ausgedehnte, noch unveröffentlichte ψ-Bestimmungen,

Tabelle II[6]).

$Pé = \frac{u \cdot d \cdot \varrho \cdot c}{\lambda}$	$Pr = 1$	$Pr = 1/2$	$Pr = 1/4$	$Pr = 1/10$
$40 \cdot 10^3$	110	109		
60	149	148		
80	188	186	184	
100	223	221	217	
160	324	322	318	
200	388	386	378	362
400	681	673	662	640
600	951	942	932	890
800	1206	1200	1186	1146
1000	1448	1445	1413	1383
1200	1680	1677	1650	1611
1600	2140	2132	2108	2052

die im hiesigen Laboratorium durch Herrn Hermann ausgeführt wurden. Was die Übereinstimmung mit der Erfahrung anbelangt, so erscheint die Isolierung der verschiedenen sonstigen, den Wärmeübergang beeinflussenden Variablen heute noch nicht so weit geführt, daß eine bündige Prüfung möglich wäre. Immerhin ist das Ergebnis unserer bisherigen eigenen Messungen insofern in qualitativer Übereinstimmung mit den obigen Entwicklungen, als mit abnehmendem Pr (bei Pé = konst.) $\frac{\alpha d}{\lambda}$ einheitlich zu kleineren Werten rückt.

5) Insofern besteht eine äußere Ähnlichkeit mit Prandtls Gleichung (Physik. Zeitschr. **29**, 487, 1928), Prandtl erhält jedoch die Abhängigkeit von 2 Variablen bereits bei einfachem Potenzgesetz.

6) Die Lücken bei kleinen Pé und Pr rühren daher, daß unsere neueren ψ-Messungen, die den Berechnungen zugrunde liegen, nicht zu den entsprechenden kleineren Rey-Werten reichen.

Leipzig, Abteilung für angewandte Mechanik und Thermodynamik des Physikalischen Instituts. 8. Mai 1929.

(Eingegangen 27. Mai 1929.)

Über den Bau eines großen Elektromagneten.

Von A. Glaser.

Im folgenden soll berichtet werden über den Bau und die Eigenschaften eines großen Elektromagneten, den ich in den verflossenen Jahren im Physikalischen Institut der Universität München mit Mitteln, die ich der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften verdanke, erbaut habe. Ich möchte betonen, daß ich diesen Magneten nicht etwa deswegen beschreibe, weil ich glaubte, daß seine Konstruktion irgendein neues Prinzip von besonderem wissenschaftlichen Werte enthielte, sondern allein — entsprechend dem Wunsche zahlreicher Physiker — um zu

zeigen, daß es möglich ist einen so großen Elektromagneten in einem gut eingerichteten Hochschulinstitute selbst herzustellen. Größte Einfachheit der Konstruktion, die sich in möglichst einfacher Herstellungsweise und billigem Herstellungspreise auswirken sollte, war daher das hauptsächliche Leitmotiv.

Die Konstruktionsprinzipien für große Magnete haben sich ja seit Pierre Weiß, mit einziger Ausnahme des Boasschen Magneten, kaum verändert. Ich habe mich zu dem Weißschen Prinzipe der Wasserkühlung als dem einfacheren entschlossen. Es stellt das Boassche Prinzip zwar die entschieden elegantere Lösung des Problems dar. Der zur Betätigung der Luftkühlung in den Magneten eingebaute Motor scheint mir aber geeignet zu sein, in mancher Hinsicht störend zu wirken, z. B. wohl bei allen empfindlichen magnetostatischen Messungen. Zudem ist die Wasserkühlung zweifellos die wirksamere. Mit ihrer Hilfe kann man den ganzen Magneten selbst bei beträchtlichen Belastungen noch praktisch kalt halten, wenn man über die nötigen Wasserdrucke verfügt. Und dies ist für manche Versuche doch sehr wesentlich, vor allem dann, wenn man Felder von höchster Konstanz und großer Stärke benötigt. Denn wenn sich der Magnet beim Stromdurchgange auch nur bis zu technisch zulässigen Temperaturen erwärmt, so verfügt man während der unter Umständen beträchtlich langen Zeit, welche bis zum Eintritt stationärer Verhältnisse verstreicht, über kein konstantes Magnetfeld (Widerstandsänderung des Leitungsmaterials, Suszeptibilitätsänderung des Eisens), muß also warten, und das kostet Zeit und Strom. Der einzige Unterschied, den mein Magnet von dem Weißschen in konstruktiver Hinsicht aufweist, ist die Einrichtung zur Verstellung der Polspitzen. Beim Weißschen Magneten können die Polspitzenabstände bekanntlich in der Weise variiert werden, daß die Polspitzen mehr oder weniger weit aus den Magnetschenkeln, die die Spulen tragen, herausgeschoben werden. Das hat aber den Nachteil, daß dabei die Spulen selbst feststehen bleiben, man also den Spielraum zwischen den Spulenwänden nicht verändern kann, so daß man bei der Anordnung eventueller voluminöserer Apparatteile außerhalb des stärksten Magnetfeldes, aber doch in der Nähe der Polspitzen sehr beengt ist. Bei meinem Magneten nun bewegen sich die Polspitzen mitsamt Magnetschenkeln und Spulen relativ zu dem walzenförmigen Joch. Für den Fall, daß man bei großem Spulenabstande ein kleines Interferrikum benötigt, ist ein verlängertes Polspitzenpaar vorgesehen, das dem normalen magnetisch äquivalent ist (s. Fig. 1). Diese Anordnung der Polverschiebung bietet noch den weiteren Vorteil, daß ihre immer sehr kantenreichen Konstruktionselemente sich in jener Gegend des Magneten befinden, in welcher das Eisen infolge der großen Querschnitte, die dort verwendet werden können, die geringste Magnetisierung aufweist, Streuverluste also so weit wie möglich vermieden werden. Auch der magnetische „Widerstand" des Überganges zwischen Magnetschenkel und Joch wird durch die großen Berührungsflächen stark herabgedrückt.

Bei der Konstruktion eines Elektromagneten muß man davon ausgehen, ein wie hohes mittleres Feld man in einem bestimmten Raume zu erzeugen beabsichtigt. Daraus ergibt sich dann zwangsläufig der Eisenquerschnitt in den Spulen. Denn die im allgemeinen etwas oberhalb von 20000 Gauß liegenden Sättigungswerte der magnetischen Induktion jener Eisensorten, die für den Magnetbau in Betracht kommen, geben für jeden Eisenquerschnitt einen maximalen magnetischen Fluß, der nicht überboten werden kann. Die Wirkung der Polspitzen ist dann die, daß sie die im Eisenkerne der Spulen parallel und annähernd mit gleichmäßiger Dichte verlaufenden magnetischen Kraftlinien an der engsten Stelle des Interferrikums etwas konzentriert. Hierbei läßt sich erfahrungsgemäß — auch wenn man Kegelstutzpole verwendet — keine beliebig hohe Konzentration des magnetischen Flusses erzielen. Der mittlere[1]) magnetische Fluß zwischen den Flächen der Kegelstutzpole wird das 2,5-fache des Flusses, der im Eisen eine gleichgroße Fläche durchsetzt, im allgemeinen kaum überschreiten können. Aus dem soeben Gesagten ergibt sich, daß es sinnlos ist, gegen die Verwendung großer Eisenmassen im Magnetbau zu polemisieren, wie dies zuweilen geschieht. Wer beträchtliche Feldstärken in großen Räumen erzielen will, muß naturnotwendig erhebliche Eisenquerschnitte aufwenden.

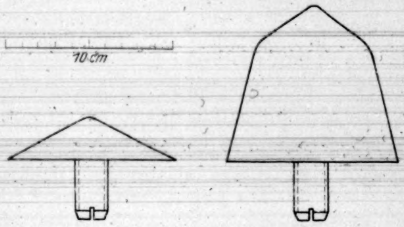


Fig. 1.

Der vorliegende Magnet sollte in einem Raume von 10 mm³, d. h. zwischen Kegelstutzpolen mit Stirnflächen von 3 mm Durchmesser

1) Das Feld ist hier natürlich inhomogen.

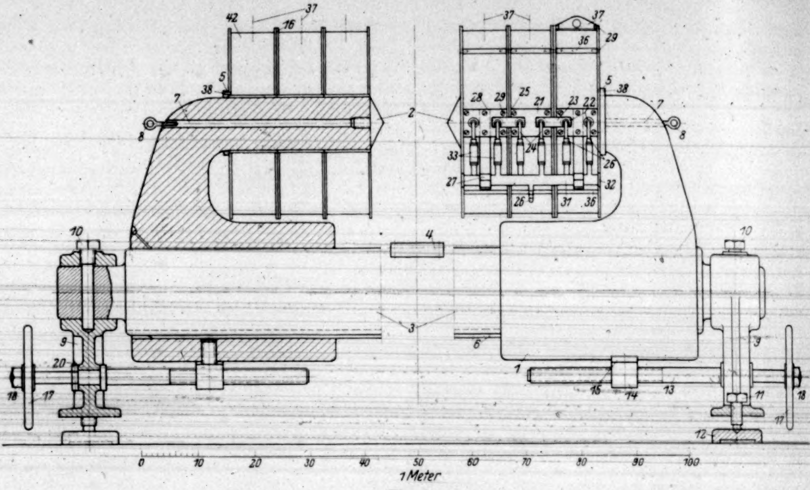


Fig. 2.

Stückliste.

Nr.	Benennung	Stck.	Material	Bemerk.	Nr.	Benennung	Stck.	Material	Bemerk.
1	Magnetschenkel . . .	2	S. M. E.		26	Anschlußstutzen . .	32	Messing	für Pos.
2	Spitzpolkegel	2	,,						24, 31, 34
3	Schenkeljoch	1	,,		27	Wasserverteiler-			
4	Jochtisch	1	Messing			halter	4	,,	
5	Schrumpfring	2	,,		28	Winkelträger	94	,,	
6	Führungsfeder . . .	1	S. M. E.		29	Schrauben 4 mm . .			Länge
7	Füllstange	2	,,			L. H. Versenkk. .	91	,,	30 DIN
8	Zugschraube	2	Messing		30	Schrauben 4 mm . .			
9	Auflager	2	,,			L. H. Zylinderkopf	4	,,	
10	Stiftschraube	2	,,		31	Wasserverteiler . . .	4	,,	
11	Stellschraube	4	Fl. E.		32	Verschlußstopfen . .	9	,,	
12	Stellschraubensteller	4	Grauguß		33	Gummistutzen	12	Dopp. Leinwd.	
13	Spindel	2	Stahl						
14	Spindeltriebmutter .	2	Messing		34	Verbindungs-T-Stück	2	Messing	
15	Zwischenstück	2	,,		35	Gummischlauch			
16	Spulenkörper	6	,,			0,70 m lang	4	Dopp.	zu Pos.
17	Handrad	2	,,					Leinwd.	34 u. 31
18	Handradmutter . . .	2	,,		36	Distanzstück	24	Messing	zu Pos. 16
19	Stellring	2	Stahl		37	Hebebügel	6	,,	,,
20	Kegelstift	2	,,	zu Pos. 19	38	Madenschraube . . .	2	,,	,,
21	Klemmbrett	6	Perinax		39	Schraubenzieher[1]) . .	1	Eisen	
22	Hohlklemme mit				40	Planpol[1])	2	S. M. E.	zu Pos.
	Muttern	12	Messing						2, 40, 41
23	Verbindungslasche .	4	,,		41	Stumpfpolkegel[1]) . .	2	,,	
24	Rohrwinkelstück . .	12	Kupfer	Material	42	Wicklungsrohr			um-
				Pos. 42		330 m pro Spule .	6	Kupfer	sponnen
25	Klemmbrettwinkel .	12	Messing						

1) Zubehör! in Fig. 2 nicht gezeichnet.

in 1 mm Abstand ein mittleres Feld von 50 000 Gauß ergeben. Das bedingt einen Durchmesser von etwa 10 cm für den Eisenkern in den Magnetspulen. Die übrigen Eisenquerschnitte ergeben sich dann auf Grund der Forderung, daß im Joche der halbe Sättigungswert (10 000 Gauß) nicht erreicht sein sollte, und daß in den Schenkeln ein stetiger Übergang stattfinden soll, von dem Induktionswerte, der im Spulenkerne herrscht, zu dem im Joche vorhandenen. Form und

Größe der genannten Eisenteile läßt Fig. 2 erkennen[1]).

Aus den Dimensionen des Eisens und denjenigen des Interferrikums sowie den entsprechenden Permeabilitäten errechnet sich die Magnetomotorische Kraft, die nötig ist, um den die Spulenkerne sättigenden magnetischen Fluß zu erzeugen, d. h. die erforderliche Anzahl von Ampèrewindungen. Die sich aus der Theorie ergebende Windungszahl habe ich nun noch mit einem reichlich bemessenen Zuschlage versehen, entsprechend der Erfahrung, daß eine derartige „Reserve“ an Ampèrewindungen immer dann von großem Nutzen ist, wenn man Felder von größerer Ausdehnung herauszustellen genötigt ist. So ergaben sich 1980 Windungen, die auf die 6 Teilspulen gleichmäßig verteilt, 330 Windungen pro Spule ergeben, oder 990 pro Schenkel.

Die wichtigste Frage beim Bau des Magneten ist die Wahl des Eisens. Wohl gibt es heute Speziallegierungen mit allen erdenklichen Eigenschaften. Wegen ihres meist recht hohen Preises scheiden diese aber von vornherein aus. Es blieb also nur Dynamostahlguß oder -Schmiedeeisen. Ich habe mich zu letzterem entschlossen, da es in handelsüblichen Qualitäten stets außerordentlich homogen (ohne Lunker und Hartstellen) und von vorzüglichen magnetischen Eigenschaften ist. Besonders seine schmale Hysteresisschleife kommt dem zustatten, der das Magnetfeld durch Betriebsstromkontrolle allein konstant halten will. Der Magnetkörper ist also aus Siemensmartineisen (feinkörnige Qualität) geschmiedet. Nach dem Schmieden wurden die Stücke einem einwöchentlichen Glühprozesse unterworfen, dergestalt, daß das Eisen jeweils am Vormittage langsam bis auf helle Rotglut angeheizt wurde, mittags zugeschüttet und dann wieder langsam abgekühlt wurde. Auf diese Weise war die Sicherheit gegeben, daß alle durch den Schmiedeprozeß hervorgerufenen Inhomogenitäten wieder ausgeglichen wurden. Zu bemerken ist hier noch, daß die einzelnen Stücke in reichlichen Dimensionen geschmiedet werden müssen, da beim Glühprozesse ein merklicher Abbrand von Eisen stattfindet. Bezüglich der weiteren Bearbeitung der Schmiedestücke ist noch zu sagen, daß die Einpassung der Schenkel in das walzenförmige Joch mit größter Genauigkeit erfolgen muß. Ich bin der Lokomotivfabrik J. A. Maffei, in deren bewährten Händen die Ausführung dieser Arbeiten, sowie der Guß der Lagerböcke und die Anfertigung der Spulen und der Verschiebungseinrichtungen der Schenkel lag, für ihre präzise Arbeit und ihr in jeder Hinsicht freundliches Entgegenkommen zu größtem Danke verpflichtet.

Nächst dem Eisen erfordert die Vorbereitung der Bewicklung und das Bewickeln der Spulen die größte Sorgfalt. Ich habe Kupferrohr von 6 mm äußerem Durchmesser und 0,5 mm Wandstärke, einmal mit Baumwolle umsponnen, verwendet. Wickelt man die 330 Windungen pro Spule in 30 Lagen à 11 Windungen, so benötigt man pro Spule etwas weniger wie 300 m isoliertes Rohr. Nun ist die maximale Fabrikationslänge von Kupferrohr allem Anscheine nach 7 m. Man ist also gezwungen, die 300 m aus Einzelstücken zusammenlöten zu lassen. Es geschah dies in der Weise, daß die beiden zu verbindenden Rohrenden über ein 5 cm langes Kupferröhrchen von 5 mm äußerem Durchmesser und 0,25 mm Wandstärke geschoben wurden und das Ganze hart verlötet wurde. Die Beschaffung der Rohre, ihre Verlötung und Isolierung führte die Zweigniederlassung Essen der Siemens-Schuckert-Werke aus. Auch dieser Firma bin ich für ihr Entgegenkommen sehr zu Dank verpflichtet. Es ist unerläßlich, die fertigen Rohre vor dem Wickeln auf Dichtigkeit zu prüfen. Eine unter Druck eingefüllte Farblösung markiert poröse Stellen auf der weißen Umspinnung das ausgelegten Rohres sicher. (Um Material zur Reparatur poröser Stellen zu haben, bestelle man das Kupferrohr reichlich!). Das Wickeln der Spulen ist eine mühsame Angelegenheit, selbst wenn hierzu eine elektrisch betriebene Wickelvorrichtung zur Verfügung steht[1]). Um die genannte Windungszahl auf einer Spule unterbringen zu können, ist ein kleiner Kunstgriff vonnöten, der es gestattet, das ganze Spulen-

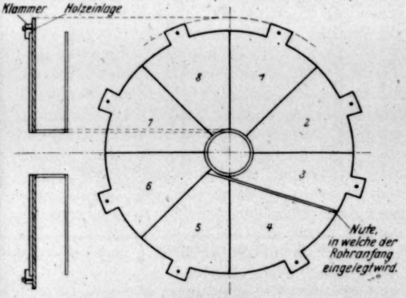


Fig. 3.

1) Die Mutterpausen der genauen Detailpläne besitzt die Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft. Von ihr können Abzüge bezogen werden, außerdem liegt je ein Abzug bei der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften und bei der Helmholtz-Gesellschaft.

1) Eine Fräsmaschine mit Zahnradvorgelege ist hierzu sehr geeignet.

lumen mit Windungen zu füllen. Man spart zunächst den Raum der ersten Windung durch Einlage von Holzsektoren von entsprechender Stärke in das Spulenlumen (s. Fig. 3) aus und bewickelt den nun noch freien Teil des Lumens

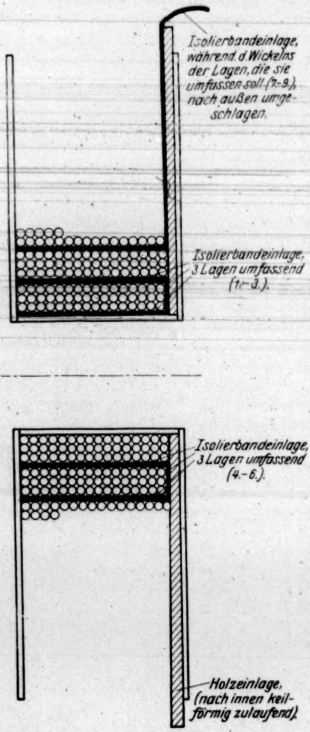


Fig. 4.
(ohne Maßstab!)

mit 29 Lagen à 10 Windungen und einer Lage (der dreißigsten) à $5^1/_2$ Windungen[1]). Dann entfernt[2]) man die Holzsektoren vorsichtig, lötet an den herausstehenden Anfang der innersten Lage ein Stück Rohr von etwas mehr wie 30 m und wickelt in das nach Entfernung des Holzes freiliegende Restlumen nun 29 Lagen à 1 Windung und eine Lage (die dreißigste zu $5^1/_2$ Windungen. Bei der letzteren Operation muß natürlich die Wickelmaschine in umgekehrter Richtung umlaufen, wie bei der ersten[1]). Das Ergebnis dieser Arbeit ist dann eine Spule mit 30 Lagen à 11 Windungen, deren Anfang und Ende sich in der Mitte der obersten Lage befinden[2]). Die 3 Spulen jedes Schenkels werden dann elektrisch hintereinander und hydraulisch parallel geschaltet, letzteres — aus Isolationsgründen — unter Zwischenschaltung kurzer Schlauchstücke[3]) (s. Fig. 2). Der Widerstand der Bewicklung jedes Schenkels beträgt dann ziemlich genau 2 Ohm. Hydraulisch werden dann die beiden Bewicklungen parallel zueinander an die Wasserleitung

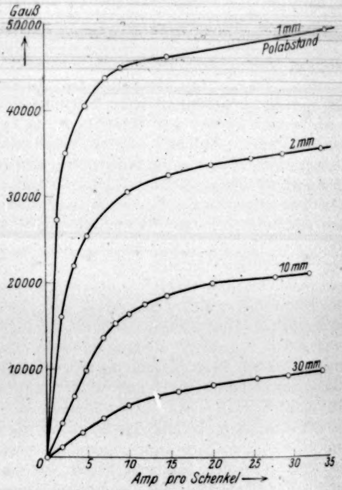


Fig. 5.

1) Um den Windungen, die ja nach Entfernung der Holzsektoren frei halten müssen, bis der Rest der Windungen gewickelt ist, mehr Halt zu geben, legt man zweckmäßig von Zeit zu Zeit an verschiedenen Stellen des Umfanges Isolierbandstücke ein in der Weise wie es die obenstehende Fig. 4 zeigt.

2) Damit sie sich leicht entfernen lassen, lasse man die Sektoren nach Innen etwas keilförmig zuhobeln.

1) Um zu vermeiden, daß die Spulenwände beim Wickeln auseinandergetrieben werden, presse man die Spulen während des Wickelns zwischen zwei kräftige Holzscheiben. Diese werden erst entfernt, wenn nach dem Wickeln die „Distanzstücke" (Stückliste Pos. 36) eingesetzt sind.

2) Um bei eventuellen „Wasserkatastrophen" das Innere der Spule vor Nässe zu schützen, versieht man die fertige, mit Manometer und Druckluft noch einmal auf Dichtigkeit untersuchte Spule mit einem dicken Lacküberzug. Ein mehrmaliger Anstrich mit Excelsiorlack Nr. 100 schwarz von Meirowsky & Co. (Porz a. Rhein) hat sich als zweckentsprechend erwiesen.

3) Es ist zweckmäßig den Wasserzufluß an dasjenige Ende der Spulenwicklung anzuschließen, das am raschesten ins Spuleninnere führt.

geschlossen. Elektrisch kann man sie parallel oder hintereinander schalten, je nach Spannung und Stromstärke, die man zur Verfügung hat.

Die Leistungen des Magneten ergeben sich aus den in Fig. 5 widergegebenen Kurven nach Messungen, die Herr cand. phil. H. Broili am hiesigen Institute ausführte. Die hierbei angewendete Meßmethode war die Induktionsmethode mit sehr kleinen Drehspulen bzw. Zugspulen, die in einem Normalfelde, dessen Feldstärke in der bekannten Weise errechnet werden kann, geeicht wurden. Bei diesen Messungen waren die Bewicklungen der beiden Schenkel parallel zueinander geschaltet. Der Gesamtwiderstand des Magneten war dann 1 Ohm. Im Falle des Polabstandes von 1 mm war die Zugspule so groß, daß sie einen Raum von etwa 10 mm³ umfaßte, so daß die errechnete Feldstärke das mittlere Feld in diesem Raume darstellt. Da das Feld natürlich inhomogen ist, gibt es in diesem Felde Stellen, an welchen die Feldstärke auch oberhalb des gemessenen Mittelwertes liegt, etwa in der Gegend von 55 000 Gauß. Damit leistet der Magnet ungefähr das gleiche wie die Weißschen Magnete von gleicher Größe. Durch Verwendung von Ferrokobalt-Polspitzen könnte man dann noch 10—12 Proz. höher kommen. Der Aufwand an elektrischer Leistung (4,9 Kilowatt) hält sich dabei in erträglichen Grenzen. Die Kühlwassertemperatur erhöhte sich bei stundenlangem Betriebe bei einem Wasserdrucke von 3 Atm. um keine 10 Grad. Bei 6 Atm. Wasserdruck kann man im Notfalle den Magneten noch leicht doppelt so hoch belasten und sich den schwachen Anstieg, den die Magnetisierungskurve bei 70 Amp. noch zeigt, zunutze machen. Die Breite der Hysteresisschleife wurde bei einer Belastung mit 28,5 Amp. zu 75 Gauß ermittelt, die magnetische Induktion bei 70 Amp. Belastung zu 21 000 Gauß. Eine angenehme Eigenschaft des Magneten muß hier noch erwähnt werden, die große Festigkeit gegen Verbiegung, die Joch und Schenkel gegenüber den gewaltigen Kräften zeigen, die zwischen den magnetisierten Polspitzen bei kleinen Polabständen wirken. (Bei 1 mm Polspitzenabstand beträgt die Verringerung dieses Abstandes unter dem Einfluß stärkster Magnetisierung kaum $^1/_{10}$ mm.)

Die Herstellungskosten beliefen sich auf 5000 M. In dieser Summe sind etwa 500 M. Mechanikerlöhne enthalten. Muß man die Arbeitszeit des Mechanikers nicht in Rechnung ziehen, was in einem wissenschaftlichen Institute ja an sich nicht nötig ist, so hat man mit etwa 4500 M. Herstellungskosten zu rechnen, ein wahrhaft niedriger Preis für einen Magneten von den geschilderten Leistungen und einem Gewichte von immerhin über 12 Zentnern.

Nächst Herrn Geheimrat W. Wien, unserem verstorbenen Institutsdirektor, auf dessen Antrag hin mir die Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft die Mittel zum Bau bewilligte, habe ich der genannten Gesellschaft für diese Mittel vielmals zu danken. Meinem Freunde, Herrn Dipl.-Ing. R. Voit möchte ich auch an dieser Stelle bestens danken für seine bereitwilligste Hilfeleistung bei der Berechnung und Konstruktion des Magneten und der Erstellung der Werkstattzeichnungen. Herrn Oberwerkführer A. Hörtensteiner habe ich schließlich zu danken für die große Sorgfalt, mit der er das mühevolle Wickeln der Spulen, das Armieren derselben und die sonstigen Mechanikerarbeiten besorgte.

(Eingegangen 24. Mai 1929.)

Über Kontaktpotentiale zwischen gleichen Metallen.

Von Werner Ende.

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

Bei quantitativen Untersuchungen über langsame Elektronen erhält man nur dann einwandfreie Werte, wenn die als Wandungen, Käfige oder Elektroden benutzten Metallteile keine zeitlichen Kontaktpotentialschwankungen gegeneinander zeigen. Man wird aus diesem Grunde die Benutzung verschiedenen Materials nach Möglichkeit vermeiden, selbst wenn das Kontaktpotential als solches in Rechnung gesetzt werden könnte, da der zeitliche Einfluß von Gasen und Dämpfen auf die Oberfläche zweier verschiedener Metalle ein verschiedener ist und da das gegenseitige Kontaktpotential nicht konstant bleiben würde. Man wird aber auch dann, wenn man ein und dasselbe Material verwendet, und wenn man jedes Materialstück in ein und derselben Weise behandelt zu haben glaubt, die Erfahrung machen, daß sich merkliche und zeitlich veränderliche Potentialdifferenzen bis zur Größenordnung 0,5 Volt herausbilden können, durch welche die Genauigkeit der betreffenden Untersuchungen wesentlich gestört wird.

Wir stellen uns jetzt folgende Aufgabe: Es soll untersucht werden, in welcher Weise zwei Stücke ein und desselben Materials behandelt werden müssen, damit die sich spontan ausbildende Kontaktpotentialdifferenz dauernd unterhalb eines bestimmten Maximalwertes bleibt, für den wir in Anlehnung an die Erfordernisse der meisten praktischen Versuche etwa 0,05 Volt festsetzen wollen.

Versuchsanordnung. Als Meßmethode wurde die von Volta bei seinem Fundamentalversuch angewandte gewählt. Hierbei stehen sich die beiden an ein bestimmtes Potential (Erde) gelegten Metalle mit den Flächen, zwischen denen das Kontaktpotential gemessen werden soll, in sehr geringem Abstande gegenüber. Entfernt man von der einen Platte die Erdung und vermindert man durch Vergrößerung des Abstandes beider Flächen die Kapazität des durch sie gebildeten Kondensators, so wird auf der nicht mehr geerdeten Platte eine durch die Kontaktpotentialdifferenz und die Vergrößerung der Kapazität gegebene Elektrizitätsmenge frei, die mit einem Elektrometer gemessen werden kann.

Da jedoch die quantitative Bestimmung des Kontaktpotentials wegen der dazu notwendigen Kapazitätsmessung der gesamten Apparatur schwierig ist, wurde in Ergänzung der Anordnung von Volta die schon von H. Pellat[1]),

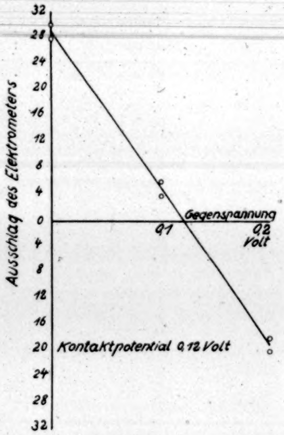


Fig. 1.

W. Thomson[2]) und R. Vieweg[3]) benutzte Nullmethode in Anwendung gebracht. Hierbei wird das Kontaktpotential durch eine entgegengesetzt gerichtete elektromotorische Kraft kompensiert. Die freigewordene Elektrizitätsmenge hat verschiedenes Vorzeichen, je nachdem das Gegenpotential größer oder kleiner als das Kontaktpotential ist. Durch graphisches Aufzeichnen der Ausschläge des Elektrometers in Abhängigkeit von diesem Gegenpotential erhält man eine Gerade. Hieraus läßt sich das Kontaktpotential, d. h. das Gegenpotential für den Ausschlag Null, genau bestimmen. Bei den vorliegenden Messungen wurden die Ausschläge bei drei verschiedenen Gegenpotentialen gemessen, deren Größe so gehalten war, daß das Kontaktpotential zwischen dem größten und kleinsten angewandten Werte lag. In Fig. 1 ist als Beispiel eine Kurve gezeich-

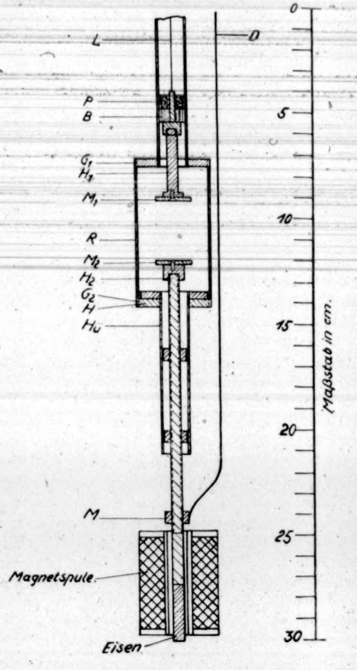


Fig. 2.

net, die sich bei einer Messung mit geschmirgelten Messingflächen im Vakuum ergab. Das Kontaktpotential betrug in diesem Falle 0,12 Volt.

Die zu den Untersuchungen benutzte Apparatur ist in ihrem Hauptteil in Fig. 2 skizziert. Sie ist aus Messing und besteht hauptsächlich aus drei Teilen, die durch Gewinde G_1 und G_2 miteinander verbunden sind. Die Metallstücke M_1 und M_2, zwischen denen das Kontaktpotential gemessen wurde, waren ca. 3 mm stark und hatten 20 mm Durchmesser. Sie konnten durch tief versenkte Schräubchen von 1,2 mm Durchmesser auf ihren Halter H_1 und H_2 befestigt werden.

1) H. Pellat, Journ. de Phys. **9**, 145, 1880.
2) W. Thomson (Lord Kelvin), Phil. Mag. **46**, 82, 1898.
3) R. Vieweg, Ann. der Phys. **74**, 146, 1924.

H_1 wird durch Bernstein B in dem Schutzrohr aus Messing von 20 mm Durchmesser gehalten und ist durch eine darüberliegende Schicht Pizein P vakuumdicht eingeschmolzen. Der Leitungsdraht L führt weiterhin elektrostatisch geschützt über einen elektromagnetisch betätigten Erdungsschlüssel zu einem Quadrantenpaar eines Quadranten-Elektrometers normaler Empfindlichkeit.

Der untere Halter H_2 ist in einer Hülse *Hü* beweglich angeordnet und besitzt einen Führungsstift, durch den eine Drehung um die Achse vermieden wird. Im Anfangszustand beträgt der Abstand $M_1 M_2$ ca. 40 mm. Das Anheben von M_2 bis auf einen geringen Abstand von M_1 erfolgt elektromagnetisch, wie aus der Figur hervorgeht. Der Abstand kann durch eine Schraubenmutter M reguliert werden, die beim Anheben an das untere Ende der Hülse *Hü* anstößt. Je näher M_1 und M_2 einander gebracht werden, um so größer wird dann beim Entfernen der Platte M_2 von M_1 die freiwerdende Elektrizitätsmenge, um so steiler wird also die Meßkurve (Fig. 1) verlaufen, während die Lage des Schnittpunktes der Kurve mit der Gegenspannungsachse unverändert bleibt. Bei Bestimmung der Punkte für eine Meßkurve muß also der Abstand $M_1 M_2$ genau reproduzierbar sein. Eventuell hierbei auftretende Fehler würden sich dadurch bemerkbar machen, daß die Meßpunkte nicht auf einer Geraden liegen.

Das Schutzrohr R hat die Länge 70 mm und den Durchmesser 40 mm. Durch vier Längsschlitze kann von außen die Bewegung von M_2 beobachtet und der Abstand $M_1 M_2$ genau eingestellt werden. M_2 und *Hü* sind von dem Rohr R durch eine Hartgummiplatte H isoliert. Die Zuführung der Gegenspannung zu M_2 erfolgt durch den Draht D, der zu M führt.

Diese ganze Messingapparatur war durch Pizein vakuumdicht in ein Glasrohr von 50 mm Durchmesser eingekittet. Die Verwendung eines mit Quecksilber gedichteten Schliffes gestattete ein leichtes Öffnen der Apparatur. Ein seitlicher Ansatz ermöglichte ein Ausfrieren von Kitt- und Quecksilberdämpfen durch flüssige Luft.

Um festzustellen, ob die gemessenen Werte wirklich dem Kontaktpotential zwischen $M_1 M_2$ entsprechen, genügt es, M_1 und M_2 miteinander zu vertauschen. Es müssen sich dann die gleichen Aufladungen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen ergeben. Kontaktpotentiale, die eventuell zwischen den versenkten Halteschräubchen von M_1 und M_2 oder zwischen dem Schutzrohr R und M_1 auftreten können, müssen sich dabei bemerkbar machen. Häufige Kontrollmessungen zeigten, daß die gemessenen Werte eindeutig dem Kontaktpotential zwischen M_1 und M_2 zuzuschreiben sind. Die Meßmethode ermöglicht eine Bestimmung der Kontaktpotentiale mit einer Genauigkeit von $\pm$ 0,01 Volt.

Ergebnisse. Gemessen wurden Kontaktpotentiale von Messing gegen Messing, Nickel gegen Nickel (elektrolytisch auf Messing aufgetragen) und Platin gegen Platin (Folie). Dies sind die Hauptmaterialien, die bei den in der Einleitung erwähnten Untersuchungen in Frage kommen.

Messing gegen Messing.

Alle zu diesen Untersuchungen benutzten Messingscheiben waren aus einem Stück Rundmessing herausgearbeitet, um einen eventuellen Einfluß von geringen Unterschieden der Zusammensetzung des Materials zu vermeiden. Indessen zeigten Messungen mit Platten, die von Messingblech und verschiedenen Stücken Rundmessing herrührten, daß die Kontaktpotentiale hierdurch nicht merklich beeinflußt werden.

Folgende Arten der Oberflächenbehandlung wurden in Anwendung gebracht:

1. Mit Säure.

Ergebnis: Kontaktpotentiale bis 0,2 Volt, sehr wenig konstant.

Nach Behandlung mit Salpetersäure oder Königswasser wurden mehrere Messingstücke längere Zeit in destilliertem Wasser gewaschen und dann im heißen Luftstrom getrocknet. Es ergaben sich in Luft Meßwerte mit sehr starken Schwankungen.

Es liegt nahe, anzunehmen, daß auf der durch die Säure aufgerauhten Oberfläche Teile der Säure trotz der Waschung zurückbleiben und als elektrolytische Oberflächenschicht dauernde Änderungen des Kontaktpotentials hervorrufen.

2. Mit Schmirgelpapier.

Ergebnis: Kontaktpotentiale bis 0,6 Volt, nicht konstant.

Die Kontaktpotentiale von 5 Paaren Messingscheiben wurden unter Anwendung aller Arten Schmirgelpapier, vom gröbsten bis zum feinsten, bestimmt. Es wurden bei etwa 150 Messungen in Luft Kontaktpotentiale bis zu 0,6 Volt gefunden. Die am meisten auftretenden Werte lagen zwischen 0,1 und 0,2 Volt.

Im Laufe von Stunden und Tagen wurden völlig unregelmäßige Änderungen der Kontaktpotentiale beobachtet.

Das Gleiche zeigte sich bei Untersuchungen im Vakuum mit und ohne Kühlung durch flüssige Luft.

3. Mit einem härteren Metall.

a) Gesägt (Laubsäge)
oder b) abgedreht (Drehbank)
„ c) gefeilt (Schlichtfeile)
„ d) geschabt (Messer).

Ergebnis: Kontaktpotentiale unterhalb 0,05 Volt.

4. Mit Sandstrahlgebläse.

Ergebnis: Kontaktpotentiale unterhalb 0,05 Volt.

Bei diesen unter 3 und 4 angeführten Behandlungsmethoden ergaben sich aus Messungen mit 5 Plattenpaaren Werte der Kontaktpotentiale, die sowohl in Luft von Atmosphärendruck als auch im Vakuum ausnahmslos kleiner als 0,05 Volt waren und lediglich im Gebiete von 0 bis 0,05 Volt Schwankungen aufwiesen.

Plattenpaar Nr.	1	2	3	4	5
Mit der Laubsäge	0,03	0,03	0,03	0,00	0,00
Auf der Drehbank abgedreht	0,02	0,03	0,04	0,03	0,01
Mit sauberer Schlichtfeile .	0,03	0,03	0,03	0,00	0,01
Mit sauberem Messer . . .	0,00	0,01	0,02	0,02	0,01
Mit Sandstrahlgebläse . . .	0,00	0,02	0,02	0,02	0,00

Aus allem geht hervor, daß die Kontaktpotentiale zwischen gleichen Metallen nur durch eine Oberflächenschicht bedingt sind, die durch geeignete Behandlung zum größten Teil beseitigt werden kann. Dies wird auch durch die Feststellung bestätigt, daß ein Berühren der nach Nr. 3 vorbehandelten Oberflächen, ferner ein Waschen mit destilliertem Wasser oder Alkohol hohe und stark veränderliche Werte des Kontaktpotentials (größer als 0,2 Volt) bewirkt. Die ungünstige Wirkung der Behandlung mit Schmirgelpapier scheint ihre Ursache darin zu haben, daß die Metalloberflächen dabei nicht nur mit den feinen Schmirgelkörnchen, sondern auch mit dem Klebstoff des Schmirgelpapiers in Berührung kommen, während die Behandlung mit reinen Sandkörnern, wie sie beim Sandstrahlgebläse vorliegt, sich als vorteilhaft erweist.

Nickel gegen Nickel.

In gleicher Weise wurden die Untersuchungen mit 5 Plattenpaaren aus vernickeltem Messing durchgeführt. Die Oberflächen wurden mit Säure, Schmirgelpapier, Feile, Messer und mit Sandstrahlgebläse behandelt. Die Ergebnisse stimmen mit den bei Messing gefundenen Werten überein.

Platin gegen Platin.

Bei diesen Untersuchungen waren die Metallstücke M_1 M_2 mit Platinfolie umwickelt, die zwischen den Platten M_1 und M_2 und den dazugehörigen Haltern H_1 und H_2 festgeklemmt wurde.

Die Messungen wurden unter folgenden Bedingungen durchgeführt: 1. mit ungereinigtem, 2. mit Säure behandeltem und 3. in Luft geglühtem Platin. Die Bearbeitung mit einem härteren Metall kam für Platinfolie nicht in Frage.

In allen untersuchten Fällen ergaben sich Kontaktpotentiale zwischen 0 und 0,23 Volt, die im Laufe von Stunden und Tagen und im Vakuum unregelmäßige Schwankungen aufwiesen. Reproduzierbare Werte von Kontaktpotentialen kleiner als 0,05 Volt konnten mit Platin nicht erhalten werden.

Zusammenfassung. Es werden Kontaktpotentialdifferenzen zwischen Stücken gleichen Materials für Messing, Nickel und Platin in Luft und im Vakuum (mit und ohne Kühlung durch flüssige Luft) bei verschiedener Oberflächenbehandlung bestimmt mit dem Zweck, die Kontaktpotentialdifferenzen durch Wahl der Oberflächenbehandlung möglichst herabzudrücken.

Günstig (Kontaktpotentialdifferenz $< 0,05$ Volt) wirkt jede Bearbeitung, bei welcher ein sauberer harter Körper zur Entfernung der Oberflächenschicht benutzt wird, nämlich Sägen, Drehen, Schaben und Behandlung mit dem Sandstrahlgebläse.

Nicht günstig (Kontaktpotentialdifferenz bis 0,5 Volt) wirkt Waschen, Ätzen und besonders auch Behandlung mit Schmirgelpapier.

(Eingegangen 11. Juni 1929.)

Über die Ausbreitung der ebenen elektromagnetischen Wellen im kugelsymmetrischen Gravitationsfelde.

Von W. Alexandrow.

Die „Strahlenablenkung" im Gravitationsfelde wird aus der Forderung abgeleitet, daß die Lichtstrahlen geodätische Nullinien sind, also rein weltgeometrisch und ohne Benutzung der Elektrodynamik. Da das Licht eine elektromagnetische Welle ist, ist es vom physikalischen Standpunkt aus wünschenswert, die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen im Gravitationsfelde zu studieren und daraus den Satz über die geodätische Nullinie und den Betrag der Ablenkung abzuleiten. Die Übereinstimmung mit dem rein weltgeometrischen Wege ist dann ein neuer Beweis der harmonischen Geschlossenheit der Theorie.

1. Die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen im schwachen Gravitationsfelde geschieht wie in einem elektrisch polarisierten und ma-

gnetisierten Medium[1]), also nach den Gleichungen:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{D} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{H} + \mathfrak{M}.$$

Unter gewissen Voraussetzungen ist:

$$\mathfrak{P} = -2\Phi\mathfrak{E} - [\mathfrak{u}, \mathfrak{B}], \quad \mathfrak{M} = -2\Psi\mathfrak{B} + [\mathfrak{u}, \mathfrak{E}],$$

mit

$$\mathfrak{u} = (-g^{01}, -g^{02}, -g^{03}), \quad \Phi = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{g g^{00} g^{11}}),$$

$$\Psi = -\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{g}(g^{11})^2),$$

wobei g_{ik} die Gravitationspotentiale sind. Ist speziell das Gravitationsfeld ein kugelsymmetrisches (statisches), so geschieht die Wellenausbreitung wie in einem Medium mit räumlich veränderlichen Dielektrizitäts- und Permeabilitätsfaktoren ε, μ, dessen Inhomogenität durch das Newtonsche Gravitationspotential $\Phi = -\frac{m}{r}$ bestimmt ist:

$$\varepsilon = \mu = 1 - 2\Phi = 1 + \frac{2m}{r}.$$

2. Wir gehen also von folgenden Differentialgleichungen aus:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} - \frac{\partial(\varepsilon\mathfrak{E})}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\mathfrak{E}) = 0,$$
$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial(\varepsilon\mathfrak{H})}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\mathfrak{H}) = 0, \tag{1}$$

mit

$$\varepsilon = 1 + \frac{2m}{r},$$

und suchen diejenige Lösung dieser Gleichungen, die für $z = +\infty$ in die ebene Welle übergeht. Hier begegnet man denselben Schwierigkeiten, wie bei Integration der Maxwellschen Gleichungen in einem inhomogenen Medium. Es gelingt aber in unserem Falle die Lösung mit der gleichen Genauigkeit zu finden, mit welcher die Gleichungen selbst gelten.

3. Es empfiehlt sich hier die Einführung zweier Vektorpotentiale, abweichend von der allgemeinen Lorentzschen Integrationsmethode der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen:

$$\varepsilon\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\mathfrak{f}_1,$$
$$\mathfrak{B} = \varepsilon\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{f}_2.$$

Man erhält sofort:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\mathfrak{f}_2 - \frac{\partial\mathfrak{f}_1}{\partial t}\right) = 0,$$

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\mathfrak{f}_1 + \frac{\partial\mathfrak{f}_2}{\partial t}\right) = 0,$$

wobei man als erste Normierungsbedingung für die Vektorpotentiale:

$$\operatorname{rot}\mathfrak{f}_2 = \varepsilon\frac{\partial\mathfrak{f}_1}{\partial t},$$
$$\operatorname{rot}\mathfrak{f}_1 = -\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{f}_2}{\partial t} \tag{2}$$

einführt. Daraus ergibt sich folgende Felddarstellung durch die Potentiale:

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{f}_2}{\partial t},$$
$$\mathfrak{B} = \varepsilon\frac{\partial\mathfrak{f}_1}{\partial t}. \tag{3}$$

Nun bilde man:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{f}_1 = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{f}_1 - \Delta\mathfrak{f}_1$$
$$= -\varepsilon^2\frac{\partial^2\mathfrak{f}_1}{\partial t^2} - \left[\operatorname{grad}\varepsilon, \frac{\partial\mathfrak{f}_2}{\partial t}\right],$$
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{f}_2 = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{f}_2 - \Delta\mathfrak{f}_2$$
$$= -\varepsilon^2\frac{\partial^2\mathfrak{f}_2}{\partial t^2} + \left[\operatorname{grad}\varepsilon, \frac{\partial\mathfrak{f}_1}{\partial t}\right].$$

Wir führen als die zweite Normierungsbedingung:

$$\operatorname{div}\mathfrak{f}_1 = 0, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{f}_2 = 0. \tag{4}$$

Ferner werden in allen unseren Gleichungen die Glieder von der Ordnung $\frac{m}{r^2}$ und höher weggelassen. Wegen $\operatorname{grad}\varepsilon = -\frac{2m\mathfrak{r}}{r^3} \sim \frac{m}{r^2}$ ergibt sich also:

$$\Delta\mathfrak{f}_1 = \varepsilon^2\frac{\partial^2\mathfrak{f}_1}{\partial t^2},$$
$$\Delta\mathfrak{f}_2 = \varepsilon^2\frac{\partial^2\mathfrak{f}_2}{\partial t^2}. \tag{5}$$

4. Bevor wir diese Gleichungen integrieren, betrachten wir die skalare Gleichung:

$$\Delta\varphi = \varepsilon^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{2m}{r}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{4m}{r}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Um die Lösung dieser Gleichung zu finden, die für $z = +\infty$ in die ebene, in der negativen z-Achsenrichtung sich ausbreitende, Welle übergeht, setzen wir:

$$\varphi = e^{i\nu(t+z)}\,\overline{\varphi},$$

wo $\overline{\varphi}$ nur von den Raumkoordinaten abhängt, und erhalten:

$$\Delta\overline{\varphi} + 2i\nu\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z} = -\frac{4m}{r}\nu^2\overline{\varphi}.$$

Hier ist $\Delta\overline{\varphi}$ von der Ordnung $\frac{m}{r^2}$, es bleibt also

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial z} = i\nu\frac{2m}{r}\overline{\varphi}.$$

[1]) W. Alexandrow, Physik. Zeitschr. 22, 593, 1921.

Eine Lösung dieser Gleichung finden wir durch Trennung der Variablen:

$$\frac{d\overline{\varphi}}{\overline{\varphi}} = i\nu 2m \frac{dz}{r},$$

$$\lg\overline{\varphi} = i\nu 2m \lg(z+r),$$

wobei die additiv noch hinzukommende Funktion von x und y allein gleich Null gesetzt worden ist. Somit ist:

$$\overline{\varphi} = e^{i\nu 2m \lg(z+r)},$$

und

$$\varphi = e^{i\nu\{t+z+2m\lg(z+r)\}} \tag{7}$$

Lösung von (6). Es wird nützlich sein direkt zu kontrollieren, daß (7) mit der hier eingehaltenen Genauigkeit Lösung von (6) ist. Dabei ist eine wichtige Bemerkung zu machen. Die Größe

$$z + r = z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

kann verschwinden, wenn $x = y = 0$ und z negativ ist. In unserer Näherung bleiben die Lichtstrahlen fast parallel der z-Achse, so daß wir unsere Gleichungen in den Gebieten benutzen, wo bei negativen z niemals $x = y = 0$ und $z + r$ von derselben Größenordnung wie r ist.

Führen wir nun die Bezeichnung ein

$$u = t + z + 2m\lg(z+r),$$

so hat grad u die Komponenten:

$$\frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}, \quad \frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}, \quad 1 + \frac{2m}{r}, \tag{8}$$

und Δu ist von der Ordnung $\frac{m}{r^2}$. Daraus hat man

$$\Delta\varphi = i\nu e^{i\nu u}\Delta u - \nu^2 e^{i\nu u}\,\mathrm{grad}^2 u =$$

$$= -\nu^2 e^{i\nu u}\,\mathrm{grad}^2 u$$

$$= \left(1+\frac{2m}{r}\right)^2\left(-\nu^2 e^{i\nu u}\right) = \left(1+\frac{2m}{r}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Auch das Produkt aus φ und einer Größe von der Ordnung $\frac{m}{r}$ ist offenbar eine Lösung von (6) in unserer Näherung.

5. Aus den gefundenen Lösungen von (6) können wir nun die Lösungen von (5) aufbauen. Es ist offenbar, wenn man mit $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen x, y, z bezeichnet:

$$\begin{aligned}\mathfrak{f}_1 &= \left(\mathfrak{e}_2 - \frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}\mathfrak{e}_3\right)e^{i\nu\{t+z+2m\lg(z+r)\}},\\ \mathfrak{f}_2 &= \left(\mathfrak{e}_1 - \frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}\mathfrak{e}_3\right)e^{i\nu\{t+z+2m\lg(z+r)\}}.\end{aligned} \tag{9}$$

Wir müssen noch zeigen, daß die Normierungsbedingungen (2) und (4) erfüllt sind. In der Tat ist unter der Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\frac{m}{r^2}$ nach (8):

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{f}_1 = \left(\mathfrak{e}_2 - \frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}\mathfrak{e}_3, \mathrm{grad}\,u\right)i\nu e^{i\nu u} = \left(\frac{2m}{r}\frac{y}{z+r} - \frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}\right)i\nu e^{i\nu u} = 0,$$

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{f}_2 = \left(\mathfrak{e}_1 - \frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}\mathfrak{e}_3, \mathrm{grad}\,u\right)i\nu e^{i\nu u} = \left(\frac{2m}{r}\frac{x}{z+r} - \frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}\right)i\nu e^{i\nu u} = 0,$$

und ferner:

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}_2 = i\nu e^{i\nu u}\left[\mathrm{grad}\,u, \mathfrak{e}_1 - \frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}\mathfrak{e}_3\right] = i\nu e^{i\nu u}\left\{-\frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}\mathfrak{e}_3 + \left(1+\frac{2m}{r}\right)\mathfrak{e}_2\right\}$$

$$= \left(1+\frac{2m}{r}\right)\frac{\partial\mathfrak{f}_1}{\partial t} = \varepsilon\frac{\partial\mathfrak{f}_1}{\partial t},$$

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}_1 = i\nu e^{i\nu u}\left[\mathrm{grad}\,u, \mathfrak{e}_2 - \frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}\mathfrak{e}_3\right] = i\nu e^{i\nu u}\left\{\frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}\mathfrak{e}_3 - \left(1+\frac{2m}{r}\right)\mathfrak{e}_1\right\}$$

$$= -\left(1+\frac{2m}{r}\right)\frac{\partial\mathfrak{f}_2}{\partial t} = -\,\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{f}_2}{\partial t}.$$

6. Aus (9) haben wir nach (3) folgende Darstellung der aus $+\infty$ nach $-\infty$ in der z-Richtung sich ausbreitenden ebenen elektromagnetischen Welle im kugelsymmetrischen (statischen) Gravitationsfelde, wenn das letzte schwach ist:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{E} &= \left(\mathfrak{e}_1 - \frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}\mathfrak{e}_3\right)\cdot\nu\sin\nu u\\ \mathfrak{B} &= \left(-\mathfrak{e}_2 + \frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}\mathfrak{e}_3\right)\left(1+\frac{2m}{r}\right)\cdot\nu\sin\nu u\end{aligned}} \tag{10}$$

$$u = t + z + 2m\lg(z+r).$$

7. Um den Gang der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld zu studieren, bilden wir das Vektorfeld des Poyntingschen Strahlvektors:

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}, \mathfrak{B}] = \left[\mathfrak{e}_1 - \frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}\mathfrak{e}_3, -\mathfrak{e}_2 + \frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}\mathfrak{e}_3\right]\left(1+\frac{2m}{r}\right)v^2 \sin^2 u$$

$$= \left\{-\mathfrak{e}_3 - \frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}\mathfrak{e}_1 - \frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}\mathfrak{e}_2\right\}\left(1+\frac{2m}{r}\right)v^2 \sin^2 u. \qquad (11)$$

Die „Strahlenablenkung" ist daraus unmittelbar ersichtlich. Denn zu der Richtung $-\mathfrak{e}_3$ des ursprünglichen Strahles kommen noch veränderliche Beiträge in der negativen $\mathfrak{e}_1$- und $\mathfrak{e}_2$-Richtung hinzu.

Für die Lichtstrahlen ergibt sich also folgende Differentialgleichung:

$$\frac{dz}{1} = \frac{dx}{\frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}} = \frac{dy}{\frac{2m}{r}\frac{y}{z+r}}. \qquad (12)$$

Aus den beiden letzten folgt, daß die Strahlen in den Meridianebenen um die z-Achse liegen $\left(\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}\right)$. Wir können also den Strahlengang in der Ebene $y = 0$ studieren und erhalten die Differentialgleichung:

$$dz = \frac{dx}{\frac{2m}{r}\frac{x}{z+r}} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2+z^2}. \qquad (12a)$$

8. Die Differentialgleichung (12a) müssen wir in unserer Nährung lösen.

Wir schreiben:

$$\frac{dx}{dz} = 2m\frac{x}{r(z+r)}.$$

Nun ist, unter Benutzung dieser Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dz}\left\{-\frac{2mx}{z+r}\right\} = \frac{dx}{dz}\left\{1 - \frac{2m}{z+r} + \frac{2m}{r}\frac{x^2}{(z+r)^2}\right\}.$$

Unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\frac{m}{r^2}$ lautet also die Differentialgleichung einfach:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{d}{dz}\left\{-\frac{2mx}{z+r}\right\},$$

und integriert:

$$x = -\frac{2mx}{z+r} + R.$$

Nach einfacher Umformung lautet dies:

$$\frac{2mx}{R-x} = z + \sqrt{x^2+z^2};$$

da rechts eine positive Größe steht, muß $0 < x < R$ liegen.

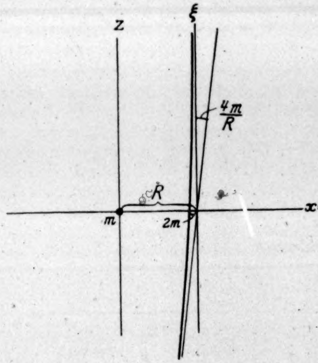
Wir quadrieren, wobei zu beachten ist, daß das Quadrat links nicht vernachlässigt werden kann (da $R - x$ von der Größenordnung m ist):

$$\frac{4m^2x^2}{(R-x)^2} - \frac{4mxz}{R-x} = x^2,$$

und nach einfachen Umformungen:

$$4mz = x\left\{\frac{4m^2}{R-x} - (R-x)\right\}, \quad 0 < x < R. \quad (13)$$

9. Was bedeutet nun die Integrationskonstante R? Nähert sich x von den Werten $x < R$ aus dem Wert $x = R$, so wird $z = +\infty$: R bedeutet also den Abstand des aus $z = +\infty$ kommenden Lichtstrahles vom Zentrum des kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes. Nun verfolgen wir den Strahl nur solange, als $R - x$ von der Größenordnung m ist; das stimmt auch damit, was oben (unter 4.) über das Verschwin-



den von $z + r$ auseinandergesetzt worden ist, und überhaupt ist es nur möglich, den Strahl höchstens bis zum Gebiet zu verfolgen, wo die von allen Seiten kommenden gekrümmten Strahlen sich zu überschneiden beginnen (welcher Umstand mathematisch höchst unangenehm ist). Dieses Gebiet ist es, wo $z + r$ Werte nahezu gleich Null hat und $R - x$ bedeutend von der Größenordnung m abweicht. Im Sinne unserer Approximation ist es also erlaubt, in

(13) vor der Klammer $x = R$ zu setzen. Setzen wir noch außerdem $x = R + \xi$ (Verschiebung der y-Achse), so erhalten wir:

$$R\xi^2 - 4mz\xi = 4m^2R. \qquad (14)$$

Dies ist eine Hyperbel (siehe Figur) mit den Asymptoten:

$$R\xi^2 - 4mz\xi = 0,$$

also $\xi = 0$ oder $x = R$ und $\frac{\xi}{z} = \frac{4m}{R}$. Das ist aber die bekannte, aus der Weltgeometrie sich ergebende geodätische Nulllinie. Der Asymptotenwinkel, also der Betrag der Strahlenablenkung, hat auch den wohlbekannten Wert:

$$\frac{4m}{R}.$$

10. In diesem Zusammenhange sei noch eine Bemerkung über die „Pseudoenergie" des kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes erlaubt. Bekanntlich führt die Newtonsche Theorie zum negativen Wert der Energiedichte $-\frac{1}{2}(\text{grad}\,\Phi)^2$. Es ist vielleicht nicht bemerkt worden, daß die Einsteinsche Theorie denselben Wert der „Pseudoenergiedichte", nur mit dem positiven Vorzeichen, liefert. Denn der Wert, welcher in Weyls „Raum, Zeit, Materie"[1]) angegeben ist, beruht wohl auf einem Versehen. (Es ist kaum nötig zu bemerken, daß der Berechnung ein bestimmtes Koordinatensystem zugrunde liegt, und zwar dasjenige, in welchem das räumliche Linienelement konform auf ein euklidisches bezogen ist.) Diese Berechnung sei hier kurz ausgeführt. Man hat

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = h^2$$

und

$$\gamma^{11} = \gamma^{22} = \gamma^{33} = \frac{1}{h^2},$$

alle anderen

$$\gamma_{ik} = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{\gamma} = h^3.$$

Zur Berechnung des Flußvektors

$$\mathfrak{m}^i = \tfrac{1}{2} f \sqrt{\gamma}\left(\gamma^{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ i\end{Bmatrix} - \gamma^{i\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ \beta\end{Bmatrix}\right)$$

kann man im ersten Glied $\alpha = \beta$ und $\gamma^{\alpha\alpha} = \frac{1}{h^2}$, im zweiten Gliede $\alpha = i$, $\gamma^{ii} = \frac{1}{h^2}$ und bekanntlich

$$\begin{Bmatrix}i\beta\\ \beta\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x_i} = 3\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_i}$$

1) 5. Auflage. 1923. Springer, Berlin. S. 276. Im folgenden werden die gleichen Bezeichnungen gebraucht.

setzen. Von den Christoffelschen Ausdrücken braucht man also nur folgende zu berechnen:

$$\begin{Bmatrix}\alpha\alpha\\ i\end{Bmatrix} = \frac{1}{2h^2}\left\{2\delta_i^\alpha\frac{\partial\gamma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial h^2}{\partial x_i}\right\},$$

und dies liefert für $i = \alpha$

$$\begin{Bmatrix}\alpha\alpha\\ i\end{Bmatrix} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_i},$$

und für $\alpha \neq i$

$$\begin{Bmatrix}\alpha\alpha\\ i\end{Bmatrix} = -\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

Alles eingesetzt erhält man:

$$\mathfrak{m}^i = -2f\frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

Nun ist

$$f = \frac{1 - \frac{m}{2r}}{1 + \frac{m}{2r}}, \qquad h = \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^2.$$

Somit ist:

$$\mathfrak{m}^i = \frac{2m}{r^2}\left(1 - \frac{m}{2r}\right)\frac{x_i}{r}.$$

Der radiale Fluß ist also:

$$\frac{2m}{r^2}\left(1 - \frac{m}{2r}\right),$$

der Gesamtfluß durch eine Kugeloberfläche vom Radius r:

$$8\pi m\left(1 - \frac{m}{2r}\right),$$

und die innerhalb dieser Kugel enthaltene Masse:

$$\frac{8\pi m}{\varkappa}\left(1 - \frac{m}{2r}\right).$$

Die außerhalb der Kugel enthaltene Masse ist:

$$\frac{4\pi m^2}{\varkappa\cdot r}.$$

Dies entspricht der positiven Energiedichte $\frac{1}{\varkappa}\frac{m^2}{r^4}$, da

$$\frac{1}{\varkappa}\int_r^\infty \frac{m^2}{r^4}\cdot 4\pi r^2\,dr = \frac{4\pi m^2}{\varkappa r}$$

ist. Man kann diese Dichte auch in der Form schreiben

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\varkappa}{8\pi}\left(\frac{m_0}{r^2}\right)^2,$$

mit $m_0 = \frac{8\pi m}{\varkappa}$. Bei Verwendung gewöhnlicher Einheiten kommt noch der Faktor c^2 hinzu;

setzt man noch $\frac{\varkappa c^2}{8\pi} = k$, so erhält man

$$\frac{k}{8\pi}\left(\frac{m_0}{r^2}\right)^2,$$

also den Wert, welchen die Newtonsche Theorie liefert, nur mit einem positiven Vorzeichen.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird die Ausbreitung der elektromagnetischen (ebenen) Wellen im schwachen kugelsymmetrischen Gravitationsfelde untersucht. Vom physikalischen Standpunkt aus ist es wünschenswert, den Satz, daß die Lichtstrahlen geodätische Nullinien beschreiben, und den Betrag der Einsteinschen „Strahlenablenkung" nicht weltgeometrisch, sondern elektrodynamisch abzuleiten. Die Ausbreitung der Lichtwellen geschieht wie in einem Medium mit räumlich veränderlichen Dielektrizitäts- und Permeabilitätsfaktoren. Es sind ähnliche Schwierigkeiten auch bei der Integration zu überwinden; es gelingt die Lösung mit derselben Genauigkeit zu finden, mit welcher die Gleichungen selbst gelten (bei der Integration werden zwei Vektorpotentiale eingeführt). Die gekrümmten Lichtstrahlen werden dann als Feldlinien des Poyntingschen Strahlvektors abgeleitet. Diese Feldlinien sind die bekannten aus der Weltgeometrie folgenden Hyperbeln mit dem Asymptotenwinkel $\frac{4m}{R}$. — Zum Schluß wird noch eine Bemerkung über die „Pseudoenergiedichte" des kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes gemacht und es wird gezeigt, daß diese bei Verwendung der konform-euklidischen Koordinaten den Newtonschen Wert $\frac{k}{8\pi}\left(\frac{m_0}{r^2}\right)^2$, aber mit positivem Vorzeichen, hat, was mit der bekannten Schwierigkeit, die Faraday-Maxwellsche Feldtheorie auf das Gravitationsfeld auszudehnen, zu vergleichen ist.

Zürich, den 3. Juni 1929.

(Eingegangen 6. Juni 1929.)

Über die Bildung des Ozons in den höchsten Atmosphärenschichten.

Von Wilhelm Anderson.

Bekanntlich ist unsere Atmosphäre in großer Höhe (etwa zwischen 30 und 50 km über dem Erdboden) relativ reich an Ozon. Die Menge des Ozons ist äquivalent einer Schicht von etwa 3 mm reinen Ozons unter normalen Bedingungen.

Es ist ausgeschlossen, daß die ultraviolette Sonnenstrahlung die Hauptrolle bei der Bildung des Ozons spiele. Dobson, Harrison und Lawrence haben nämlich gefunden, daß die Polargegenden reicher an Ozon sind als die tropischen Gebiete[1]). Ebensowenig ist anzunehmen, daß die Hauptquelle der Ozonbildung in den Gewittern zu suchen sei: der in der Troposphäre vorhandene Staub und Dunst macht eine starke Ozonkonzentration unmöglich[2]). Auch müßten dann, der Beobachtung zuwider, die Tropen relativ reicher an Ozon sein als die Polargegenden (da ja die meisten Gewitter in den Tropen stattfinden).

Es bleibt nur die Annahme, daß die Ozonbildung durch irgendeine Korpuskularstrahlung hervorgerufen wird, wahrscheinlich durch dieselbe, welche auch das Nordlicht und die magnetischen Stürme verursacht. Dobson sagt: „. . . . the connexion found between the amount of ozone and magnetic disturbance might suggest some action associated with the aurora . . . ."[3]). Hier aber begegnet uns folgende Schwierigkeit.

Die Hauptmenge des Ozons befindet sich etwa zwischen 30 und 50 km über der Erdoberfläche. Das Nordlicht hingegen tritt in sehr viel größeren Höhen auf: meistens über 100 km und niemals unter 80 km. Man müßte also annehmen, daß die Ozonmoleküle in großer Höhe gebildet werden und dann herabsinken. Ein solches Herabsinken würde aber außerordentlich langsam vor sich gehen. Dobson, Harrison und Lawrence erwähnen die Meinung von Lindemann, daß ein kleines elektrisches Feld in der Atmosphäre das Herabsinken der Ozonmoleküle beschleunigen könnte[4]). Mir scheint jedoch eine solche Annahme bedenklich zu sein: wie kann in jenen, zweifellos gut leitenden Atmosphärenschichten ein merkliches elektrisches Feld bestehen? — Ich schlage einen ganz anderen Ausweg vor.

1) G. M. B. Dobson, D. N. Harrison und J. Lawrence, Proc. Roy. Soc. A, **122**, 483 f., 1929.
2) Dobson und Harrison, Proc. Roy. Soc. A, **110**, 691, 1926.
3) Dobson, Nature **123**, 712, 1929.
4) Dobson, Harrison und Lawrence, Proc. Roy. Soc. A, **122**, 485, 1929.

Höhe über der Erdoberfläche	Die über der entsprechenden Höhe befindliche Massenschicht der Atmosphäre	Partialdruck des Sauerstoffs	Die im ccm befindliche Sauerstoffmasse	Ozonbildung (wobei als Einheit 10^{-23} g · cm^{-3} · sec^{-1} genommen ist)
30 km	10,200 g · cm^{-2}	0,825 mm Hg	$1{,}970 \cdot 10^{-6}$ g · cm^{-3}	12
40 ,,	2,584 ,,	0,171 ,,	$3{,}251 \cdot 10^{-7}$,,	4125
50 ,,	0,816 ,,	0,048 ,,	$8{,}496 \cdot 10^{-8}$,,	6316
60 ,,	0,272 ,,	0,014 ,,	$2{,}318 \cdot 10^{-8}$,,	2969
70 ,,	0,122 ,,	0,0054 ,,	$8{,}399 \cdot 10^{-9}$,,	1249
80 ,,	0,0408 ,,	0,0012 ,,	$1{,}866 \cdot 10^{-9}$,,	301
90 ,,	0,0136 ,,	0,0003 ,,	$4{,}666 \cdot 10^{-10}$,,	77
100 ,,	0,00816 ,,	0,00012 ,,	$1{,}866 \cdot 10^{-10}$,,	31

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Energieabnahme der Korpuskularstrahlung nach einem einfachen Exponentialgesetz stattfinde; der Massenabsorptionskoeffizient sei gleich 1. Auf die Frage über die Natur einer solchen Korpuskularstrahlung gehe ich hier nicht ein. Die Richtung der Korpuskularstrahlung sei senkrecht zur Erdoberfläche; die einfallende Energiedichte betrage außerhalb der Atmosphäre 1 Erg · cm^{-2} · sec^{-1}.

Was die Abhängigkeit des Luftdruckes von der Höhe anbetrifft, so akzeptiere ich die von Gutenberg berechneten Werte[1]). So z. B. findet Gutenberg, daß in 60 km Höhe der Gesamtdruck gleich 0,2 mm Hg ist und die Temperatur gleich 310° abs. Der Gehalt an Sauerstoff beträgt in dieser Höhe 6 Volumprozente. Aus Gutenbergs Werten ist nicht schwer zu berechnen, daß der Partialdruck des Sauerstoffs in dieser Höhe 0,014 mm Hg beträgt und die im ccm enthaltene Masse des Sauerstoffs $2{,}318 \cdot 10^{-8}$ g. Der Gesamtdruck von 0,2 mm Hg entspricht einer Schicht von 0,272 g · cm^{-2}. In der beigefügten Tabelle sind die Resultate solcher Berechnungen aufgeführt.

Zur Bildung eines Gramm-Moleküls Ozon aus Sauerstoff sind 34 100 g-Kalorien erforderlich[2]); 1 Erg bildet also $3{,}362 \cdot 10^{-11}$ g Ozon. Bei der Ozonbildung durch Elektronenstoß wird aber nur 5 bis 11 Proz. der Gesamtenergie zur eigentlichen Ozonbildung verbraucht; die übrige vom Sauerstoff absorbierte Energie wird in Wärme verwandelt[3]). Wir wollen die niedrigere Zahl akzeptieren, d. h. 5 Proz. Wenn also 1 Erg durch reinen Sauerstoff absorbiert wird, so ist die Menge des entstandenen Ozons gleich $\frac{1}{20} \cdot 3{,}362 \cdot 10^{-11} = 1{,}681 \cdot 10^{-12}$ g.

Wir haben angenommen, daß die Energiedichte der (senkrecht) einfallenden Korpuskularstrahlung außerhalb der Atmosphäre gleich 1 Erg · cm^{-2} · sec^{-1} sei. Damit diese Korpuskularstrahlung sich z. B. bis auf 60 km der Erdoberfläche nähern kann, muß sie eine Schicht von 0,272 g · cm^{-2} passieren. Da wir den Massenabsorptionskoeffizienten gleich 1 angenommen haben, so wird die Energiedichte der einfallenden Korpuskularstrahlung in 60 km über der Erdoberfläche $e^{-0{,}272} = 0{,}762$ Erg · cm^{-2} · sec^{-1} betragen. Der Sauerstoffgehalt in dieser Höhe ist gleich $2{,}318 \cdot 10^{-8}$ g · cm^{-3}. Nimmt man der Einfachheit halber an, daß alle Gase den gleichen Massenabsorptionskoeffizienten hinsichtlich der Energie unserer Korpuskularstrahlung besitzen, so absorbiert der im ccm befindliche Sauerstoff in der Sekunde $0{,}762\,(1 - e^{-2{,}318 \cdot 10^{-8}}) = 1{,}766 \cdot 10^{-8}$ Erg. Diese vom Sauerstoff absorbierte Energie bewirkt die Entstehung von $1{,}766 \cdot 10^{-8} \cdot 1{,}681 \cdot 10^{-12} = 2{,}969 \cdot 10^{-20}$ g · cm^{-3} · sec^{-1} Ozon. In der 5. Spalte unserer Tabelle sind die Resultate ähnlicher Berechnungen für verschiedene Höhen aufgeführt (wobei als Einheit 10^{-23} g · cm^{-3} · sec^{-1} gewählt ist). Wir sehen, daß die reichlichste Ozonbildung zwischen 40 und 50 km stattfindet.

Es unterliegt heutzutage wohl kaum einem Zweifel, daß die Linien des Nordlichtspektrums als „verbotene" Sauerstofflinien angesehen werden müssen[1]). Offenbar wird der Sauerstoff durch die Korpuskularstrahlung „angeregt", d. h. in einen metastabilen Zustand übergeführt. Nach Ablauf einer gewissen „Verweilzeit" wird die aufgespeicherte Energie ausgestrahlt. Sollte es aber noch vor dem Ablauf der Verweilzeit zu einem Zusammenstoß mit einem anderen Molekül kommen, so wird die aufgespeicherte Energie nicht ausgestrahlt, sondern sie verwandelt sich in kinetische Energie. Wir wissen, daß Nordlicht niemals unter 80 km Höhe zu beobachten ist. Man kann daher annehmen, daß in den tieferen Schichten das durchschnittliche Zeitintervall

1) B. Gutenberg, Meteor. Zeitschr. **43**, 429, 1926.

2) S. Jahn, Zeitschr. f. Anorg. Chem. **60**, 357, 1908.

3) F. Krüger und O. Utesch, Ann. d. Phys. (4) **78**, 156, 1925.

1) Vgl. z. B. L. A. Sommer, Zeitschr. f. Phys. **51**, 451, 1928.

zwischen zwei molekularen Zusammenstößen geringer ist als die „Verweilzeit" im metastabilen Zustande. Auf diese Weise wird ganz ungezwungen erklärt, warum das Nordlicht dort nicht auftreten kann, wo die maximale Ozonbildung stattfindet.

D. Chalonge findet, daß die Ozonschicht in der Nacht merklich dicker ist als am Tage[1]). Aus den von Chalonge angeführten Zahlen ergibt sich ein durchschnittlicher Unterschied von etwa 0,89 mm O_3. Man muß also annehmen, daß die Korpuskularstrahlung in 12 Stunden eine Ozonschicht von über 0,89 mm O_3 erzeugt. Diese Schicht ist äquivalent einer Schicht von etwa $1{,}976 \cdot 10^{-4}$ g · cm^{-2}. Sie wird erzeugt in 12 Stunden; also in 1 Sekunde über $4{,}574 \cdot 10^{-9}$ g · cm^{-2} Ozon. Wir haben gesehen, daß 5—11 Proz. der von reinem Sauerstoff absorbierten Energiemenge zur eigentlichen Ozonbildung verbraucht wird. Wir wollen jetzt die höhere Zahl akzeptieren, d. h. 11 Proz. Wenn also 1 Erg durch reinen Sauerstoff absorbiert wird, so ist die Menge des entstandenen Ozons gleich $0{,}11 \cdot 3{,}362 \cdot 10^{-11} = 3{,}699 \cdot 10^{-12}$ g.

Nach Gutenberg kann man annehmen, daß in 40 km Höhe die Atmosphäre nur 9 Volumprozent Sauerstoff enthält; in größerern Höhen noch weniger. Darum muß die oben berechnete Ozonmenge mehr als um das 10fache verringert werden, wenn die Korpuskularstrahlung von der irdischen Atmosphäre (statt von reinem Sauerstoff) absorbiert wird. Wir können daher sagen, daß faktisch durch 1 Erg sicherlich weniger als $3{,}699 \cdot 10^{-13}$ g Ozon gebildet wird. Da aber nach Chalonges Beobachtungen die Korpuskularstrahlen über $4{,}574 \cdot 10^{-9}$ g · cm^{-2} · sec^{-1} Ozon bilden, so muß der Energiestrom dieser Korpuskularstrahlung über $4{,}574 \cdot 10^{-9}/3{,}69 \cdot 10^{-13} = 12400$ Erg · cm^{-2} · sec^{-1} betragen. Ein solcher Energiestrom scheint mir aber bedenklich groß zu sein. Auch A. Ångström scheint von der Realität der Chalongeschen Beobachtungen nicht ganz überzeugt zu sein: „Obwohl die Chalongeschen Werte . . . mit großer Vorsicht aufgenommen werden müssen, verdienen sie doch angeführt zu werden . . ."[2]).

Was die von Dobson, Harrison und Lawrence beobachtete jährliche Schwankung des Ozongehalts anbetrifft[1]), so unterliegt sie keinem Zweifel. So z. B. betrug in Oxford im Oktober 1927 der Ozongehalt nur 2,37 mm O_3; im April 1928 hingegen 3,23 mm O_3. In 6 Monaten ist der Ozongehalt um 0,86 mm O_3 gestiegen, also in 1 Sekunde durchschnittlich um $5{,}53 \cdot 10^{-8}$ mm O_3, was $1{,}228 \cdot 10^{-11}$ g · cm^{-2} äquivalent ist. Zur Erzeugung einer solchen Ozonschicht in der Sekunde ist ein Energiestrom von $1{,}228 \cdot 10^{-11}/3{,}699 \cdot 10^{-13} = 33$ Erg · cm^{-2} · sec^{-1} notwendig. Man darf aber nicht vergessen, daß diese Zahl nur einen Minimalwert darstellt. Es unterliegt ja keinem Zweifel, daß ein beträchtlicher Teil des entstandenen Ozons wieder zerstört wird (durch ultraviolette Sonnenstrahlung und durch andere Ursachen). Die Korpuskularstrahlung erzeugt also sicherlich beträchtlich mehr als $1{,}228 \cdot 10^{-11}$ g · cm^{-2} · sec^{-1} Ozon. Darum muß auch der entsprechende Energiestrom beträchtlich größer als 33 Erg · cm^{-2} · sec^{-1} sein. Ein solcher Energiestrom muß zu einer recht bedeutenden Temperatursteigerung in den höchsten Atmosphärenschichten führen[2]).

K. Büttner glaubt, daß das atmosphärische Ozon hauptsächlich durch die Höhenstrahlung gebildet werde: „Es liegt daher nahe, hier, wie bei der Kennelly-Heaviside-Schicht, die Ultra-γ-Strahlung als zeitlich konstanten Ozonisator anzunehmen, dem sich der Sonneneinfluß nur überlagert"[3]). Eine solche Annahme scheint mir aber ganz unmöglich zu sein, weil der Energiestrom der Höhenstrahlung außerhalb der Atmosphäre nach Gerasimovič von der Größenordnung 10^{-5} Erg · cm^{-2} · sec^{-1} ist[4]); die beobachtete Ozonbildung verlangt aber, wie wir eben gesehen haben, einen über $3{,}3 \cdot 10^{6}$mal größeren Energiestrom.

1) Daniel Chalonge, C. R. **186**, 446, 1928.
2) Anders Ångström, Gerlands Beiträge zur Geophysik 21, 160, 1929.

1) Dobson, Harrison und Lawrence, Proc. Roy. Soc. A, **122**, 466, 1929.
2) Vgl. die Hypothese von H. Petersen, Physik. Zeitschr. **28**, 510, 1927.
3) Konrad Büttner, Handbuch der Experimentalphysik, Leipzig 1928, Bd. 25, 1. Tl., S. 521.
4) B. P. Gerasimovič, Proc. Amer. Acad. of Arts and Sciences **62**, 184, 1927.

Dorpat (Estland), 17. Juni 1929.

(Eingegangen 20. Juni 1929.)

BESPRECHUNGEN.

Arthur Haas, Materiewellen und Quantenmechanik. Kl.-8⁰. VI u. 179 S. Mit 2 Fig. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft. 1929. RM. 7.—, geb. RM. 8.—.

Das Programm, einem breiten, nicht einseitig vorgebildeten Leserkreis die neueste Phase der theoretischen Physik: die Quantenmechanik in ihren Grundzügen und wesentlichen Resultaten verständlich zu machen, ist dem Verfasser dieses kleinen Werkes in hohem Maße gelungen. Es ist keine leichte Aufgabe, einen so abstrakten Stoff, dessen Konturen außerdem noch fließend sind, dem wissenschaftlich interessierten Laien nahezubringen, ohne entweder sich mit den allgemeinsten Umrissen zu begnügen, oder eine allzu ermüdende geistige Anstrengung von ihm zu verlangen. Verfasser hat bereits in seinen früheren Büchern und Schriften genügend bewiesen, wie weitgehend es ihm gegeben ist, auch schwierige Gedankengänge in leicht faßliche Form zu bringen und dadurch Ergebnisse wissenschaftlicher Forschung über den engsten Fachkreis hinauszutragen.

Durch diese Geschicklichkeit der Darstellung wird es möglich, selbst so subtile Theoreme, wie die Quantenstatistik von Bose und von Fermi in die elementare Behandlung aufzunehmen und zu verdeutlichen. Auch der von Heisenberg begründete Weg der Quantenmechanik und dessen formales Rüstzeug: die Matrizenrechnung, kommen gebührend zur Geltung, obwohl selbstverständlich das Hauptgewicht auf die Schrödingersche Richtung gelegt ist, die dem physikalischen Verstehen am meisten entgegenkommt.

Sehr begrüßenswert ist die Aufnahme des Paulischen Prinzips und dessen fundamentale Auswirkung auf die Systematik der Grundstoffe als besonderes Kapitel (obwohl dieser Punkt nicht unmittelbar zum behandelten Stoff gehört), wodurch der mysteriöse Schalenaufbau der Elemente so wunderbar einfach seine Erklärung findet und die Bohrsche Vorstellung a posteriori so eindrucksvoll verifiziert wird.

Das sehr klar und lebendig geschriebene Büchlein möge jedem warm anempfohlen sein, der über die jüngste Entwicklungsphase der theoretischen Spekulation einen ersten orientierenden Überblick gewinnen will.

Die rasche Folge der 2. Auflage ist ein bester Beweis dafür, wie weitgehendes Bedürfnis nach einem Werkchen solcher Art in breiten Kreisen vorhanden ist. Die rapiden Fortschritte in der behandelten Disziplin haben bereits in der kurzen Zeit eine Erweiterung um vier Kapitel notwendig gemacht. Diese sind: Die Einwirkung der Licht- und Materiewellen auf Atome, die quantenmechanische Resonanz, die relativistische Verallgemeinerung der wellenmechanischen Grundgleichung und die Diracsche Theorie des Elektrons. Lanczos.

M. v. Ardenne, Verstärkermeßtechnik. Gr.-8⁰. 235 S. mit 246 Textabb. Berlin, J. Springer. 1929. RM 22.50, geb. RM 24.—.

Die Verstärkerröhre hat auch der Meßtechnik neue Wege eröffnet, zugleich auch neue Aufgaben gestellt. In seinem neuesten Werk gibt M. v. Ardenne eine Zusammenfassung der in den letzten Jahren entwickelten Geräte und Methoden, die zur Erzeugung von Wechselspannungen, deren Messung und Regelung sich der Verstärkerröhren bedienen oder an Verstärkern bzw. Empfängern und Gleichrichtern Messungen gestatten. Darüber hinaus werden noch einige länger bekannte Instrumente (Frankesche Maschine, Detektor, Schleifenoszillograph) beschrieben. Das Werk wird besonders denjenigen von Wert sein, die die Entwicklung auf diesem Gebiet nicht mit an der Quelle verfolgen konnten, einen Überblick über den Stand der Meßtechnik mit und an Verstärkerröhren erhalten oder für die Durchführung solcher Messungen einige Fingerzeige bekommen möchten. Der Verfasser weist auch verschiedentlich auf Schwierigkeiten und Fehlerquellen, insbesondere bei Hochfrequenzmessungen, hin, die besonders dem ungeübteren Experimentator recht wertvoll sein werden.

W. Reichardt.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: Der Leiter der Abteilung für landwirtschaftliche Gärungen am Institut für Gärungsgewerbe Dr. Gerhard Ruschmann an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin, an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. E. Pohland für allgemeine, anorganische und analytische Chemie, an der Universität Amsterdam Dr. W. Hurevicz für Mathematik.

Ernannt: Der ord. Professor der Astronomie an der Universität Straßburg Dr. Ernest Esclangon zum Dir. der Sternwarte in Paris (an Stelle von Henri Alexandre Deslandres), der wissenschaftliche Mitarbeiter beim Institut Einstein in Berlin Dr. Hermann Müntz zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Leningrad, der Lektor an der Höheren Technischen Schule in Malmö Dr. S. V. Bodfors zum Professor der Chemie an der Universität Lund, der Lektor an der Höheren Technischen Schule in Oerebro Dr. J. A. Hedvall zum Professor der Chemischen Technologie an Chalmers Tekniska Institut in Göteborg.

Ehrungen: Dem ord. Porfessor der phys. Chemie Dr. Georg von Hevesy in Freiburg (Br.) wurde von der Akademie der Wissenschaften in Rom der Cannizzaro-Preis erteilt.

Gestorben: Der Ordinarius der Chemie und Direktor des Chem. Instituts der Tierärztlichen Hochschule in Hannover Professor Dr. Karl Arnold, der Ordinarius der Physikalischen Chemie an der Universität Frankfurt a. M. Professor Dr. Richard Lorenz, der ord. Professor der Chemie an der Universität Posen Dr. Antoni Korczynski.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig